

Prueba final A

Nombre:

Apellidos:

Curso:

Grupo:

Fecha:

1. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 42$, calcula razonadamente el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & z & y \\ 5 & 5 & 5 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

2. Discute el sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a - 1 \\ 3x - 2az = a - 1 \end{cases}$ y resuélvelo solamente para el caso $a = 1$.

3. Se considera la ecuación matricial $AX - 2X = B$, donde A y B son las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Resuélvela despejando convenientemente la matriz X y sustituyendo posteriormente los datos.

4. Dada la superficie esférica de centro $C(1, 2, 0)$ y tangente al plano $\pi: 2x + y - 2z + 20 = 0$, se pide hallar:

- La ecuación general de la superficie esférica.
- Las coordenadas del punto de tangencia.
- El área de la superficie esférica y el volumen de la esfera que delimita.

5. Los planos $\pi_1: x - y - z + 1 = 0$, $\pi_2: x - 3y - 5z + 3 = 0$ se cortan en una recta r . Determina:

- La ecuación paramétrica de dicha recta.
- El ángulo que forman dichos planos.
- La ecuación de otro plano que pasa por $P(3, -5, 3)$ y corta perpendicularmente a los planos dados.

6. Dado el punto $P(-3, 1, 0)$ y la recta $r: (1 + 3t, -1 + t, -2)$, determina:

- La ecuación del plano perpendicular a la recta y que pasa por P .
- La distancia del punto a la recta.
- Las coordenadas del punto simétrico de P respecto de la recta r .

7. Halla los valores de a y de b para que la función $f(x) = \begin{cases} a + bx - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + ax + 8 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 4]$ y determina el valor o valores que verifican la tesis del teorema.

8. Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x-1}{2+x}$.

- Estudia su monotonía y curvatura.
- Representa gráficamente la función determinando además sus asíntotas.

9. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \frac{3x}{\sqrt{5+3x^2}} dx$

b) $\int \frac{x+4}{x^2-3x} dx$

10. Se considera el recinto acotado y limitado por la función $f(x) = e^{-x}$, los ejes de coordenadas y la recta $x = 1$.

- Determina el área de dicho recinto.
- Halla el volumen del cuerpo de revolución que se genera cuando el recinto anterior gira alrededor del eje de abscisas.

Soluciones

$$1. \begin{vmatrix} x & z & y \\ 5 & 5 & 5 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} x & z & y \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} x & z & y \\ 10 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \begin{vmatrix} x & z & y \\ 10 & -9 & 6 & -9 & 9 & -9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 42 = 210$$

2. $|A| = 2(a+3)(a-1)$. Por tanto:

Si $a \neq -3$ y $a \neq 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

Si $a = -3 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

Si $a = 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < \text{número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad (uniparamétrico). La solución se escribe } x = -2\lambda, y = \lambda, z = -3\lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$

$$3. AX - 2X = B \Rightarrow (A - 2I)X = B \Rightarrow X = (A - 2I)^{-1}B$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad |A - 2I| = -1.$$

$$\text{Por tanto, resulta } (A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -15 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -15 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -62 & -62 & -62 \\ -20 & -20 & -20 \\ -25 & -25 & -25 \end{pmatrix}$$

$$4. a) \text{ Radio } r = d(C, \pi) = \frac{|2+2+20|}{\sqrt{4+1+4}} = 8$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 64 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 59$$

$$b) T = \pi \cap r \text{ donde } r(C, \vec{n}_\pi): \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

$$2(1+2\lambda) + (2+\lambda) - 2(-2\lambda) + 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{8}{3} \Rightarrow T\left(\frac{19}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{16}{3}\right)$$

$$c) A = 4\pi r^2 = 256\pi, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2048}{3}\pi$$

$$5. a) \begin{cases} x - y - z = -1 \\ x - 3y - 5z = -3 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$b) \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1+3+5}{\sqrt{3}\sqrt{35}} \Rightarrow \alpha = 28^\circ 33' 39''$$

c) Los vectores $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, normales a π_1 y π_2 respectivamente, son directores del plano π :

$$\pi = \begin{vmatrix} x-3 & y+5 & z-3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: x+2y-z=-10$$

$$6. a) \pi: 3x + y + d = 0. \text{ Como } P \in \pi \Rightarrow d = 8 \Rightarrow \pi: 3x + y + 8 = 0.$$

$$b) M = \pi \cap r \Rightarrow 3(1+3t) + (-1+t) + 8 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(-2, -2, -2)$$

La distancia pedida será:

$$d(P, r) = |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14} \text{ u}$$

c) M es el punto medio del segmento PP' , donde $P'(x, y)$ es el simétrico de P buscado. Por tanto:

$$-2 = \frac{x-3}{2} \Rightarrow x = -1; \quad -2 = \frac{y+1}{2} \Rightarrow y = -5,$$

$$-2 = \frac{z}{2} \Rightarrow z = -4 \Rightarrow P'(-1, -5, -4)$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow a+2b-4 = 2a+12 \Rightarrow a = 2b-16$$

$$f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow b = a+8 \Rightarrow a = 0 \text{ y } b = 8$$

La tesis del teorema dice que:

$$\exists c \in (-1, 4) / \frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = f'(c) \Rightarrow \frac{33}{5} = f'(c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c < 2, & 8 - 2c = \frac{33}{5} \Rightarrow c = \frac{7}{10} \\ c > 2, & 2c = \frac{33}{5} \Rightarrow c = \frac{33}{10} \end{cases}$$

$$8. D = \mathbb{R} - \{-2\}$$

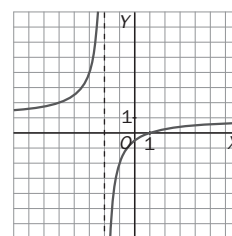
$$f'(x) = \frac{3}{(2+x)^2} > 0; \quad f''(x) = \frac{-6}{(2+x)^3} \neq 0, \quad \forall x \in D.$$

No tiene extremos relativos ni puntos de inflexión. Creciente en todo D .

Si $x \in (-\infty, -2)$ es cóncava hacia arriba y en $(-2, +\infty)$ es cóncava hacia abajo.

Asíntota vertical: $x = -2$.

Asíntota horizontal: $y = 1$.



$$9. a) \int \frac{6x}{2\sqrt{5+3x^2}} dx = \sqrt{5+3x^2} + C$$

$$b) \frac{7}{3} \int \frac{dx}{x-3} - \frac{4}{3} \int \frac{dx}{x} = \frac{7}{3} \ln|x-3| - \frac{4}{3} \ln|x| + C$$

$$10. a) A = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e} \text{ u}^2$$

$$b) V = \pi \int_0^1 (e^{-x})^2 dx = \pi \left[-\frac{e^{-2x}}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) \text{ u}^3$$