Tema 2. Determinantes

1. Determinante de una matriz

1.1. Definición de determinante

El determinante de una matriz cuadrada es un número. Para la matriz A, su determinante se denota por det(A) o por $|A|$.

El cálculo de un determinante puede hacerse a partir del más sencillo, el de orden 2; el determinante de una matriz de orden 3 se hace a partir de la orden 2; el de una matriz de orden 4, a partir de la orden 3; y así sucesivamente.

- Para **una matriz de orden 2**, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se define:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\rightarrow \text{Es la diferencia de los productos cruzados.}$$

Ejemplos:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=3\cdot 7-2\cdot 4=21-8=13$ b) $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-5\cdot 1-4\cdot 0=-5$

- Para una **matriz de orden 3**, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, su determinante vale:

$$|A|=\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\boxed{a_{11}}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-\boxed{a_{12}}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\boxed{a_{13}}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Si se calcula cada determinante de orden 2 y se ordenan los términos por signos, se obtiene:

$$|A|=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\rightarrow$$

$$|A|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

Resultado que puede recordarse fácilmente con la **regla de Sarrus** (Francia, 1798–1861), cuyo esquema es:

Productos con signo positivo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

Productos con signo negativo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$-(a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{22}a_{31})$$

Observación: El determinante de una matriz de orden n puede definirse como la suma de todos los productos de n factores cada producto, elegidos de filas y columnas diferentes (un factor de cada fila y uno de cada columna). En total habrá $n!$ sumandos/productos. (En el caso de $n = 2$, habrá $2! = 2$ sumandos; si $n = 3$, habrá $3! = 6$ sumandos). El signo de cada producto dependerá de la paridad de la inversión de cada permutación; aquí se dará la regla de signos. Dicho esto, el determinante de una matriz se define como: $|A|=\sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$.

Ejemplos:

a) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 9 & 8 & 7\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 7\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4 & 6\\ 9 & 7\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 9 & 8\end{vmatrix}=35-48-2(28-54)+3(32-45)=$

$= -13 - 2 \cdot (-26) + 3 \cdot (-13) = 0$

Aplicando la regla de Sarrus, se tendría:

$|A| = 1 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 6 \cdot 9 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 7 - 3 \cdot 5 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 0.$

b) Si la matriz es triangular, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal

$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & -8\\ 0 & -5 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=1\cdot(-5)\cdot 3=-15$; $\quad |A|=\begin{vmatrix}4 & 0 & 0\\ -3 & -7 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=4\cdot(-7)\cdot(-1)=28$

1.2. Menor complementario y adjunto de un elemento

El **menor complementario**, M_{ij}, del elemento a_{ij} de la matriz $A=(a_{ij})_{n\times n}$ es el determinante de la matriz de orden $n - 1$, que resulta al suprimir la fila i y la columna j de la matriz A.

El **adjunto** del elemento a_{ij} de la matriz $A=(a_{ij})_{n\times n}$ es $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. Esto es, el adjunto es + o – el menor correspondiente.

Para la matriz $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, los menores complementarios de los elementos de la primera fila son: $M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$; $M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$; $M_{13}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$

Para la misma matriz, los adjuntos de los elementos de la segunda fila son:

$A_{21}=-\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$; $A_{22}=+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$; $A_{23}=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$

Observaciones:

1) El adjunto es el menor con signo más o menos. Los signos de los adjuntos se van alternando, como se indica en la tabla adjunta:

+	–	+	–
–	+	–	+
+	–	+	–
–	+	–	+

2) Los determinantes se pueden desarrollar por la fila o columna que se desee. Su valor es la suma de los elementos de esa fila o columna por sus respectivos adjuntos. Así, para determinantes de matrices de orden 3:

$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$ (por $F1$)

$|A|=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$ (por $F2$)

$|A|=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$ (por la columna $C3$).

Así, desarrollado por la tercera columna:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & \boxed{3}\\ 4 & 0 & \boxed{-6}\\ -1 & 8 & \boxed{-2}\end{vmatrix}=\boxed{3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 0\\ -1 & 8\end{vmatrix}-\boxed{(-6)}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 8\end{vmatrix}+\boxed{(-2)}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=3\cdot 32+6\cdot 10-2\cdot(-8)=172$$

1.3. Determinantes de orden 4 y superior

Teniendo en cuenta la definición de menor complementario, y lo hecho para determinantes de orden 3, el cálculo de un determinante de orden 4 se hace como sigue:

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} & \boxed{a_{14}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \left(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - a_{14}M_{14}\right) =$$

$$= \boxed{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \boxed{a_{12}} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a1 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \boxed{a_{13}} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - \boxed{a_{14}} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Generalizando, el cálculo de un determinante de orden n se hace mediante el cálculo de determinantes de orden $n - 1$.
Esto es, el determinante de una matriz A de orden n se calcula como sigue:
Por la fila i:

$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} \to A_{ij}$ es el adjunto del elemento a_{ij}.

Por la columna j:

$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$

Dado que este proceso puede resultar muy engorroso convendrá desarrollar por la fila o columna que tenga más ceros.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ \boxed{0} & \boxed{7} & \boxed{-3} & \boxed{0} \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ -3 & -5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{7} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \\ -3 & 8 & 1 \end{vmatrix} - \boxed{(-3)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (150) - (-3) \cdot 20 = 1110.$$

(Los ceros no es preciso escribirlos: el resultado del producto correspondiente será 0).

2. Algunas propiedades de los determinantes

Las propiedades que siguen se enuncian para facilitar el cálculo de determinantes. Las más significativas son:

1) El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta: $|A| = |A^t|$.

Esta propiedad permite aplicar todo lo que se diga para filas a columnas.

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 6 - 8 + 2(+18) = 34$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 - 3(-12) = 34$$

2) Si se intercambian entre sí dos filas (o dos columnas) de un determinante, su valor es el mismo cambiado de signo.

Ejemplo:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} c & b & a \\ i & h & g \\ f & e & d \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 34$, pero si se cambia la fila 2ª por la 3ª $\to$ $\begin{array}{c} \\ F3 \\ F2 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -34$

3) Un determinante no varía si a una de sus filas se le suma o resta otra fila cualesquiera; u otra fila multiplicada por un número (siempre elemento a elemento).
La transformación que se hace es sustituir una fila por ella misma más, o menos, otra fila multiplicada por un número. (Lo dicho para filas vale para columnas).

Ejemplo:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ F2-F1 \\ F3+2F1 \end{array}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-a & e-b & f-c \\ g+2a & h+2b & i+2c \end{vmatrix}$ $\to$ A la segunda fila se le ha restado la primera, y a la tercera fila se le ha sumado el doble de la primera.

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ d+e+f & e & f \\ g+h+i & h & i \end{vmatrix}$ $\to$ A los elementos de la primera columna se les han sumado los de las otras dos columnas.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & -6 \end{vmatrix} \begin{array}{c} = \\ F2+3F1 \\ F3-2F1 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 15 & 10 \\ 0 & -1 & -10 \end{vmatrix} = -140$ (Compruébese).

<u>Observaciones:</u>
1) La fila 2ª inicial, $F2$, se cambia por $F2 + 3F1$. Un <u>error frecuente</u> consiste en cambiar $F1$ por $3F1 + F2$. Así se multiplica la primera fila por 3, lo que multiplica por 3 el resultado.
2) Al hacer los cambios anteriores se ha buscado que aparezcan ceros en la primera columna; esta estrategia facilita mucho los cálculos del determinante.

4) Si los elementos de una fila (o columna) se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por ese mismo número. Esto es:

$$\det(k\cdot F1, F2, ..., Fn) = k\cdot\det(F1, F2, ..., Fn)$$

Esta propiedad permite "sacar factor común" por filas en un determinante.

Ejemplo:

$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ -7 & -14 & 21 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10\cdot(-7)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -70\cdot(-60) = 4200$ $\to$ (10 "sale" de $F1$; -7, de $F2$)

5) Si $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, entonces: $|kA|=k^n|A|$.

Esto es, al multiplicar una matriz *A* por *k*, sus determinante queda multiplicado por k^n, siendo n el orden de la matriz *A*.

Ejemplos:

Si $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 4 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow 2A=\begin{pmatrix}2 & -6 & 10\\ 8 & -2 & 0\\ -4 & 0 & 10\end{pmatrix}$.

Al calcular $|2A|$, se puede sacar el factor 2 de cada fila:

$$|2A|=\begin{vmatrix}2 & -6 & 10\\ 8 & -2 & 0\\ -4 & 0 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boxed{2}\cdot 1 & 2\cdot(-3) & 2\cdot 5\\ \boxed{2}\cdot 4 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 0\\ \boxed{2}\cdot(-2) & 2\cdot 0 & 2\cdot 5\end{vmatrix}=\boxed{2\cdot 2\cdot 2}\cdot\begin{vmatrix}1 & -3 & 5\\ 4 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 5\end{vmatrix}=2^3\cdot|A|$$

Es fácil ver que $|A|=45$ y $|2A|=360=8\cdot 45$. Esto es: $|2A|=2^3|A|$.

<u>Observaciones</u>:

Si $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, $kA=\left(ka_{ij}\right)_{n\times n}$ $\to$ se multiplica por *k* todas las filas, todos los elementos de la matriz. En consecuencia, de cada fila puede sacarse *k* como factor. Si hay dos filas, $k\cdot k=k^2$; si hubiese *n* filas, el factor sería k^n.

En cambio, $k|A|$ es el producto de dos números. Eso es, no es lo mismo $|kA|$ que $k|A|$.

6) El determinante de un producto de matrices es el producto de sus determinantes.

Si *A* y *B* son matrices del mismo orden, entonces: $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$.

$\to$ En particular: $|A^2|=|A\cdot A|=|A|\cdot|A|=(|A|)^2$; y $|A^k|=(|A|)^k$

Ejemplo:

Si $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 18 & 8\end{pmatrix}$.

Los determinantes valen: $|A|=4+6=10$; $|B|=-4$; $|A\cdot B|=32-72=-40$.

Efectivamente, se cumple que $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$ $\to$ 10 · (–4) = –40.

- **Consecuencias de esas propiedades: determinantes que valen 0**

Con frecuencia interesa saber si un determinante vale 0. (La importancia de que $|A|=0$ se verá más adelante). Pues bien, a partir de las propiedades anteriores se cumple:

1) Un determinante vale 0 si todos los elementos de una fila o columna son ceros.

Ejemplos:

a) $\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 4 & 6 & 2\\ -3 & 8 & 1\end{vmatrix}=0$ b) $\begin{vmatrix}-2 & 0 & 7\\ 4 & 0 & 2\\ -3 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$

$\to$ Estos determinantes no se hacen; se igualan directamente a 0, indicando el motivo.

2) Un determinante vale 0 si tiene dos filas (o dos columnas) iguales o proporcionales.

3) Un determinante vale 0 si una fila o columna es combinación lineal de otras.

Ejemplos:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 5 \\ -4 & -8 & 7 \\ 5 & 10 & -3 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$

En a) si se intercambian $F1$ y $F3$ da igual (sólo cambiaria el "color" de las filas); pero su valor sería el mismo con el signo cambiado. Y el único número que tiene el mismo valor con signo + y con – es el 0.
En b) las columnas 1ª y 2ª son proporcionales: $C2 = 2 \cdot C1$.
En c) se observa que $C1 = C2 + C3$.

2.1. Álgebra de determinantes (aplicación de las propiedades)

Para practicar las propiedades anteriores se proponen y resuelven los siguientes ejercicios. (El lector debería plantearse el pequeño reto de resolverlos personalmente, y recurrir a estas soluciones sólo si tiene dificultades o para comprobar sus respuestas).

Ejercicio 1. (Propuesto en Selectividad en 2011, en Aragón)
Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular el valor de

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbf{R}.$$

Solución:
Restando la fila 1ª a las otras dos se tiene:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = 2(ad-bc).$$

Ejercicio 2
Calcula el valor de los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+3 & a+4 & a+5 \\ a+6 & a+7 & a+8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{vmatrix}$.

Solución:
a) Restando la fila 1ª a las otras dos se tiene:

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+3 & a+4 & a+5 \\ a+6 & a+7 & a+8 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \end{array} \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$, pues tiene dos filas proporcionales.

b) Igualmente,

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \end{array} \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$, pues $F3 = 2F2$.

Ejercicio 3

Halla los valores de x para los que el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$ vale 0.

Para cada uno de esos valores comprueba que en la matriz A se da algún tipo de combinación lineal entre filas y columnas; indícala de manera explícita.

Solución:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix}=-x^2+4x-3=0 \Rightarrow x=1 \text{ o } x=3$$

Para $x=1$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\to$ Puede verse que $F3=4F1+F2$; también $C3=3C2-C1$.

Para $x=3$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\to$ En este caso: $F3=4F1+\frac{1}{3}F2$; o $C3=C2-C1$.

Ejercicio 4

En el supuesto que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=5$, halla el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ d+g & e+h & f+i \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} g & 2h & i \\ d & 2e & f \\ a & 2b & c \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & 3b+a & -2c-a \\ d & 3e+d & -2f-d \\ g & 3h+g & -2i-g \end{vmatrix}$

Solución:

a) Se aplican las propiedades: el determinante no varía si a una fila se le resta otra; puede sacarse factor común de los elementos de una fila. Luego:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ d+g & e+h & f+i \end{vmatrix} \underset{F3-F2}{=} \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=3\cdot 5=15$$

b) Se aplican las propiedades: si se intercambian entre sí dos filas, el valor del determinante es el mismo cambiado de signo; puede sacarse factor de una columna. Luego:

$$\begin{vmatrix} g & 2h & i \\ d & 2e & f \\ a & 2b & c \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=-2\cdot 5=-10$$

c) Se aplican las transformaciones que se indican:

$$\begin{vmatrix} a & 3b+a & -2c-a \\ d & 3e+d & -2f-d \\ g & 3h+g & -2i-g \end{vmatrix} \underset{\substack{C2-C1\to \\ C3+C1}}{=} \begin{vmatrix} a & \boxed{3}b & \boxed{-2}c \\ d & 3e & -2f \\ g & 3h & -2i \end{vmatrix}=\boxed{3}\cdot(\boxed{-2})\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=3\cdot(-2)\cdot 5=-30$$

3. Cálculo práctico de determinantes

3.1. Transformación de Gauss en un determinante

La aplicación de las propiedades anteriores facilita el cálculo del determinante de una matriz. Como se habrá observado en los ejemplos vistos, una buena estrategia es aplicar esas transformaciones para conseguir en alguna fila o columna el mayor número de ceros. Para ello es conveniente "pivotar" sobre algún elemento fácil de multiplicar (1 o −1 son cómodos).

Ejemplos:

a) $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 7 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ -3 & -5 & 8 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ F2-2F4 \\ F3+2F4 \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 17 & -19 & 0 \\ -2 & -5 & 22 & 0 \\ -3 & -5 & 8 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 17 & -19 \\ -2 & -5 & 22 \end{vmatrix}$$

→ Se ha desarrollado por la 4ª columna. Si se reitera el método, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 17 & -19 \\ -2 & -5 & 22 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ F2+17F1 \\ F3-5F1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 37 & 0 & 32 \\ -12 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot\begin{vmatrix} 37 & 32 \\ -12 & 7 \end{vmatrix} = 37\cdot 7 + 32\cdot 12 = 643.$$

b) Si al aplicar esas transformaciones se observa alguna combinación lineal entre filas y columnas, el determinante valdrá 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ C2-2C1 \\ C3-3C1 \\ C4-4C1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & -8 & -12 \\ 9 & -8 & -16 & -24 \\ 13 & -12 & -24 & -36 \end{vmatrix} = 0$$, pues como fácilmente puede observarse, $C3 = 2\cdot C2$ y $C4 = 3\cdot C2$.

c) Propuesto en Selectividad varias veces.
Calcula el siguiente determinante.
Hay varias estrategias. Una de ellas puede ser restar la fila 1ª a las demás:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \\ F4-F1 \end{matrix} \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ → desarrollando por la cuarta

columna: $$|A| = -a\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} a+1 & a & a \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a\cdot(-1) + (a+1) + a + a = 4a+1$$

→ Un procedimiento más elegante, aunque inicialmente nada sencillo, consiste en:
1) sumar a la primera columna las otras tres; 2) restar la primera fila obtenida a todas las demás; 3) hallar el determinante resultante (que es diagonal):

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a+1 & a & a & a \\ 4a+1 & a+1 & a & a \\ 4a+1 & a & a+1 & a \\ 4a-1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a+1 & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4a + 1$$

4. Ampliación de la definición de rango de una matriz

Hay tres definiciones (equivalentes) de rango de una matriz:
1) Es el número de vectores fila linealmente independientes de esa matriz. (El rango de una matriz es el número de filas no nulas que tiene dicha matriz.)
2) Es el número de vectores columna linealmente independientes de esa matriz.
3) Es el orden del mayor menor no nulo de esa matriz.

- Un **menor** es el determinante de cualquier submatriz cuadrada de una matriz dada.

Los elementos de la matriz son menores de orden 1.
Las susbmatrices 2 × 2 son menores de orden 2...
En cada caso, los elementos de las filas o columnas de un menor deben proceder de la misma fila y de la misma columna de la matriz original.

Ejemplo:

La matriz $A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & -3\\ 0 & 3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3 & -2\end{matrix}} \\ \begin{matrix}\end{matrix} & \begin{matrix}-3 & 3\end{matrix} \\ \begin{matrix}1 & 3\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}-3 & 4\end{matrix}}\end{pmatrix}$ tiene 12 menores de orden 1; sólo uno de ellos es nulo, el correspondiente al elemento a_{21}.

Tiene bastantes (exactamente 18) menores de orden 2. Por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ o $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$; ambos son no nulos: el primero vale 3; el segundo, 6. Esto asegura que el rango de la matriz es mayor o igual a 2: rango $(A) \geq 2$.

La misma matriz tiene 4 menores de orden 3, que se obtienen al suprimir cada vez una de las 4 columnas: $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

Todos estos menores son nulos (su valor es 0). En consecuencia, el rango de A es 2.

- **Cálculo práctico del rango**

El rango puede calcularse empleando cualquiera de las definiciones anteriores, pero, para mayor facilidad, conviene mezclarlas y seguir un proceso similar al que se indica a continuación:
1) Eliminar filas o columnas proporcionales o que dependan linealmente de otras, si es que se detectan.
2) Hacer el máximo número de ceros en alguna fila o columna. Así se descubren más fácilmente las posibles dependencias lineales entre filas o columnas.
3) Buscar un menor distinto de cero y del mayor orden posible.

Ejemplos:

a) En la matriz del ejemplo anterior, $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, puede observarse que $C3=-C2$; y, aunque resulta más difícil, que $C4=C1+C2$. Por tanto, las columnas 3ª y 4ª podrían eliminarse. La matriz inicial quedaría con dos columnas: su rango es 2.
Si no se ha observado nada de lo anterior (estamos algo despistados), se pasa al punto 2): hacer ceros; por ejemplo por filas:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3 & -2\\ 0 & 3 & -3 & 3\\ 1 & 3 & -3 & 4\end{pmatrix}\to \begin{array}{r}\\ \\ F3-F1\end{array}\begin{pmatrix}1 & -3 & 3 & -2\\ 0 & 3 & -3 & 3\\ 0 & 6 & -6 & 6\end{pmatrix}$$ $\to$ Habría que "ver" que $F3 = 2F2$.

Se suprime $F3$ y queda una matriz de rango 2, pues el menor $\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3\neq 0$.

b) También el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 2 & -1 & -6 & 2\\ 0 & 1 & 12 & -4\\ 3 & -1 & -3 & 1\end{pmatrix}$ es 2.

(Antes de seguir, el lector puede intentar ver combinaciones lineales entre sus filas y columnas: "cada caminante, siga su camino").
Para eliminar las filas o/y columnas sobrantes se hacen ceros en la primera columna:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 2 & -1 & -6 & 2\\ 0 & 1 & 12 & -4\\ 3 & -1 & -3 & 1\end{pmatrix}\to \begin{array}{r}\\ F2-2F1\\ \\ F4-3F1\end{array}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & -12 & 4\\ 0 & 1 & 12 & -4\\ 0 & -1 & -12 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & -12 & 4\end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow$ rango $(A) = 2 \to$ Hay 2 filas linealmente independientes.

c) Alguna vez (Selectividad 2007, Murcia) se proponen ejercicios como el siguiente:

Determina el rango de $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\ k & k & 3 & -1\\ -1 & 3 & 3 & 0\end{pmatrix}$ según los valores del parámetro k.

<u>Solución</u>:
Inicialmente no se ven combinaciones lineales entre filas o columnas: la aparición del parámetro lo complica.
Si se desea, y es factible, se transformar la matriz dada. Aquí se resta la columna 4ª a las demás, como se indica.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\ k & k & 3 & -1\\ -1 & 3 & 3 & 0\end{pmatrix}\to \begin{array}{c}C1-C4\\ C2-3C4\\ C3-3C4\end{array}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ k+1 & k+3 & 6 & -1\\ -1 & 3 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

Obviamente hay menores de orden 2 que son distintos de cero. Por ejemplo $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 6 & -1\end{vmatrix}$.

Menores de orden 3:

$\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ k+1 & 6 & -1\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix}=3k+9$, que es nulo si $k = -3$; $\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ k+3 & 6 & -1\\ 3 & 3 & 0\end{vmatrix}=3k-9$, que vale 0 si $k = 3$

Por tanto, el rango de A siempre será 3, pues para cualquier valor de k siempre va a existir un menor de orden 3 distinto de 0. (Si $k = -3$, el 2º menor es distinto de cero; si $k = 3$, el primer menor es distinto de cero; si $k \neq \pm 3$, ambos menores son no nulos.)

5. Cálculo de la inversa de una matriz usando determinantes

Una matriz A^{-1} es inversa de A si $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I$, siendo I la matriz identidad del mismo orden.

- La matriz inversa de la matriz A se calcula aplicando la siguiente fórmula: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left(A_{ij}\right)^t$,

siendo $\left(A_{ij}\right)$ la **matriz de los adjuntos** de $A = \left(a_{ij}\right)$. Los elementos de la **matriz adjunta** son $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, donde M_{ij} es el menor complementario del elemento a_{ij}.

- Una matriz cuadrada A es inversible si, y sólo si, su determinantes es distinto de 0: $|A| \neq 0$.
- Cuando una matriz cuadrada A no tiene inversa se dice que es **singular** $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$.
- Cuando la matriz A tiene inversa se dice que es **no singular** o **regular** $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$.

Ejemplos:

a) Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $|A| = -16$; en consecuencia, existe A^{-1}.

Los adjuntos son:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 12; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 20; \quad A_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12; \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

La matriz adjunta es:

$$\left(A_{ij}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 20 & -14 \\ -12 & -20 & 10 \\ 4 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

Luego: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left(A_{ij}\right)^t = \dfrac{1}{-16}\begin{pmatrix} 12 & -12 & 4 \\ 20 & -20 & 12 \\ -14 & 10 & -6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & 6 & -2 \\ -10 & 10 & -6 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Puede comprobarse que $A^{-1}\cdot A = I$:

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & 6 & -2 \\ -10 & 10 & -6 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Para la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, cuyo determinante vale $|B| = -2$, y sus adjuntos: $B_{11} = 5$, $B_{12} = -(-4) = 4$, $B_{21} = -(-3) = 3$ y $B_{22} = 2$, luego $\left(B_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Su inversa es $B^{-1} = \dfrac{1}{|B|}\left(B_{ij}\right)^t = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & -3/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Para la matriz $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & -5\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, se cumple:

1) $|C|=-1$; 2) $(C_{ij})=\begin{pmatrix}-5 & 6 & -2\\ -9 & 11 & -4\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}(C_{ij})^t=\begin{pmatrix}5 & 9 & -2\\ -6 & -11 & 3\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

$\to$ Compruébese como ejercicio que $C\cdot C^{-1}=I$.

d) La matriz $D(y)=\begin{pmatrix}3y+5 & 7 & 12\\ 2y+3 & 3 & 6\\ 3y+4 & 2 & 6\end{pmatrix}$ no tiene inversa para ningún valor real de *y*, como se comprobará a continuación.

$\to$ Una matriz no tiene inversa cuando su determinante vale 0. Por tanto, habrá que ver que $|D(y)|=0$.

En efecto, aplicando las propiedades de los determinantes:

$$|D(y)|=\begin{vmatrix}3y+5 & 7 & 12\\ 2y+3 & 3 & 6\\ 3y+4 & 2 & 6\end{vmatrix} = \begin{matrix}F1-2F3\\ F2-F3\\ \end{matrix}\begin{vmatrix}-3y-3 & 3 & 0\\ -y-1 & 1 & 0\\ 3y+4 & 2 & 6\end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix}-y-1 & 1 & 0\\ -y-1 & 1 & 0\\ 3y+4 & 2 & 6\end{vmatrix}=0,$$ pues tiene dos filas iguales.

6. Algebra de matrices (III)

El uso de determinantes y la matriz inversa permite resolver algunos problemas de algebra de matrices que en el tema anterior resultaban más complejos. Vemos algunos ejercicios.

Ejercicio 1

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, estudia si existe una matriz *X* tal que $A\cdot X\cdot B=C$, y en caso afirmativo calcúlala.

Solución:

La matriz *X* se obtiene despejando en $A\cdot X\cdot B=C$. Se despeja multiplicando por A^{-1}, por la izquierda, y por B^{-1} por la derecha. Para que esta operación sea posible es necesario que ambas matrices sean inversibles. Así es, pues $|A|=-2$ y $|B|=1$.

Por tanto: $A\cdot X\cdot B=C \Rightarrow A^{-1}\cdot(A\cdot X\cdot B)\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1} \Rightarrow (A^{-1}\cdot A)\cdot X\cdot(B\cdot B^{-1})=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$.

Cálculos:

Inversa de *A*: $|A|=-2$; adjunta $(A_{ij})=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\dfrac{-1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$

Inversa de *B*: $|B|=1$; adjunta $(B_{ij})=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$

Por tanto:

$$X=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3/2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 7/2\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Propuesto en Selectividad en 2011, en Baleares)
a) Comprobar que si *A* es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 2A - I$, donde *I* es la matriz identidad, entonces *A* es invertible. ¿Cuál es la expresión de A^{-1}?

b) Utilizar el apartado a) para calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Solución</u>:
a) Si $A^2 = 2A - I \Rightarrow I = 2A - A^2 \Rightarrow I = (2I - A)\cdot A$.
Por tanto, existe una matriz, $2I - A$, que multiplicada por *A* da la identidad. Esa matriz es la inversa de *A*: $A^{-1} = 2I - A$.
Para comprobar que *A* posee inversa hay que ver que su determinante es distinto de 0.
En efecto:

$$I = (2I - A)\cdot A \Rightarrow |I| = |(2I - A)|\cdot|A| \Rightarrow 1 = |(2I - A)|\cdot|A| \Rightarrow |A| \neq 0.$$

b) Si se quiere utilizar el apartado a) habrá que comprobar que $A^2 = 2A - I$.
Por una parte:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Por otra:

$$2A - I = 2\cdot\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Efectivamente $A^2 = 2A - I$.
Por tanto, $A^{-1} = 2I - A$.
Luego,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. (Propuesto en Selectividad en 2011, UNED)
Sea *A* una matriz cuadrada de orden 3 que verifica que $A^2 + 2A = I$, siendo *I* la matriz identidad de orden 3. Comprueba que *A* es inversible y determina su inversa en función de *A* y de *I*.
<u>Solución</u>:
La matriz *A* es inversible si $|A| \neq 0$.
De $A^2 + 2A = I \Rightarrow A(A + 2I) = I$.
Haciendo el determinante de las matrices de ambos miembros:
$|A(A + 2I)| = |I| \Rightarrow |A|\cdot|A + 2I| = 1 \to$ Por tanto, $|A| \neq 0$. (Si $|A| = 0$ el producto anterior valdría 0).
Si en $A(A + 2I) = I$ se multiplican ambos miembros por A^{-1}, por la izquierda, se tiene:

$$A^{-1}A(A + 2I) = A^{-1}I \Rightarrow I(A + 2I) = A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = A + 2I$$

Ejercicio 4. (Propuesto en Selectividad en 2011, en Andalucía)

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & k & 1\end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores del parámetro k no existe la matriz inversa de la matriz A? Justifica la respuesta.

b) Para k = 0, resuelve la ecuación matricial $(X+I)\cdot A=A^t$, donde I denota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) La matriz A no tiene inversa si su determinante vale cero: $|A|=0$.

$$\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & k & 1\end{vmatrix}=1\cdot(2k-1)=0\ \Rightarrow\ k=1/2 \Rightarrow \text{La matriz } A \text{ no tiene inversa si } k=1/2.$$

b) Para k = 0 la matriz A tiene inversa, luego:

$$(X+I)\cdot A=A^t \Leftrightarrow (X+I)\cdot A\cdot A^{-1}=A^t\cdot A^{-1} \Leftrightarrow (X+I)=A^t\cdot A^{-1} \Rightarrow X=A^t\cdot A^{-1}-I$$

Cálculo de $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}(\text{adjunta de } A)^t$:

$$|A|=-1;\quad (adjA)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Con esto:

$$X=A^t\cdot A^{-1}-I=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. (Propuesto en Selectividad en 2011, UNED)

Dados los números a y b distintos, determina si la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & a & b\\ 4 & a^2 & b^2\end{pmatrix}$ posee inversa en función de los valores de a y b.

Solución:

En primer lugar se resta la primera columna a las otras dos; después, de la segunda columna se extrae el factor $(a-2)$, y de la tercera columna, el factor $(b-2)$:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & a & b\\ 4 & a^2 & b^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & a-2 & b-2\\ 4 & a^2-4 & b^2-4\end{vmatrix}=(a-2)(b-2)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & a+2 & b+2\end{vmatrix}$$

Haciendo el determinante:

$$|A|=(a-2)(b-2)[b+2-(a-2)]=(a-2)(b-2)(b-a)$$

Como la inversa existe siempre que $|A|\neq 0$, entonces es necesario que $a\neq b$ y ambos distintos de 2.

Problemas propuestos

Calculo de determinantes

1. Halla el valor de los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ c) $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -7 & 2 \end{vmatrix}$

2. Halla el valor del parámetro para que cada determinante tome el valor que se indica:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & m \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ c) $|C| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = 1$

3. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula $A \cdot B$, $|A|$, $|B|$, $|A| \cdot |B|$ y $|A \cdot B|$.

4. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcula $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A^t \cdot B^t$, $B^t \cdot A^t$.

b) Comprueba que $|A| = |A^t|$, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. ¿Se cumple también que $|A^t \cdot B^t| = |A^t| \cdot |B^t|$?

5. Halla el valor de los siguientes determinantes (pregúntate si es necesario desarrollarlos):

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ c) $|C| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

6. Halla, desarrollándolo por la fila 2ª y por la columna 4ª, el valor del determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comprueba que el resultado es el mismo.

Uso de las propiedades de los determinantes

7. Utilizando las propiedades de los determinantes, calcula $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & 2x+5 & 2x+6 \end{vmatrix}$.

8. Utilizando trasformaciones de Gauss, halla el valor del determinante de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

9. Calcula el valor $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \end{vmatrix}$.

10. Comprueba que $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$.

11. Aplicando el resultado anterior calcula el valor de $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 49 \\ 3 & -5 & 25 \\ 3 & 4 & 16 \end{vmatrix}$.

12. Demuestra, sin desarrollarlos, pero haciendo las transformaciones de Gauss necesarias, que el valor de cada uno de los siguientes determinantes es cero.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & a+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+b \\ b & 1 & a \\ a-b & a-b & a^2-b^2 \end{vmatrix}$

13. Sean A y B matrices cuadradas de orden 3 tales que $|A|=4$ y $|B|=-1$. Halla cuando sea posible el valor de los siguientes determinantes:

$|A\cdot B|$, $|2A|$, $|A^2|$, $|A^{-1}|$, $|B^{-1}|$, $-5|B|$, $|-5B|$, $|A|+|B|$, $|A+B|$.

14. (Propuesto en Selectividad 2011, Castilla–La Mancha)
Sabemos que el determinante de una matriz cuadrada A vale –1 y que el determinante de la matriz 2 · A vale –16. ¿Cuál es el orden de la matriz A?

15. (Propuesto en Selectividad 2011, Baleares)
Si B es la matriz inversa de A y det(A) = 5, ¿cuánto vale det(B), el determinante de B?

16. Supuesto que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\dfrac{3}{4}$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2a & -2b & 2c \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 7 & 14 & 7 \\ -10 & 20 & 20 \\ 3b & 6a & 3c \end{vmatrix}$

Rango de una matriz

17. Determina, por menores, el rango de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 0 & 1\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1 & -1\\ 2 & 0 & -2 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$

18. Determina el rango de las siguientes matrices en función del parámetro.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & a\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}a & 1\\ a+1 & 2\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & a\end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix}a & 1\\ 4 & a\end{pmatrix}$

19. Determina el rango de las siguientes matrices en función del parámetro.

a) $A=\begin{pmatrix}k & 3 & 0\\ 3 & 2 & k\\ 3 & k & 0\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}k & 1-k & 2-k\\ 1 & 1 & 1\\ k & 1 & k\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}k & 1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

20. (Propuesto en Selectividad 2011, Castilla–La Mancha)

Calcula el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{pmatrix}$.

Matriz inversa

21. Aplicando la fórmula $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\left(A_{ij}\right)^t$ calcula la inversa de las siguientes matrices, si existe.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

22. Aplicando la fórmula $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\left(A_{ij}\right)^t$ calcula la inversa de las siguientes matrices, si existe.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$

23. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & a & 3\\ 4 & 1 & -a\end{pmatrix}$, halla:

a) Los valores de *a* para los que la matriz *A* posea inversa.
b) La inversa de *A* para *a* = 2.

24. (Propuesto en Selectividad 2006, Castilla–La Mancha)
a) Despeja la matriz X en función de A e I_2 en la ecuación $(X+A)^2 = X^2 + X\cdot A + I_2$, siendo X y A matrices cuadradas de orden dos, e I_2 la matriz identidad de orden dos.
b) Resuelve la ecuación $B\cdot X + B^2 = I_2$, si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

25. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
a) Halla los valores del parámetro k para los que A tiene inversa.
b) Para $k = 0$, calcula la matriz X que verifica $X\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

26. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$, encuentra una matriz simétrica P no singular tal que $B = P^{-1}\cdot A\cdot P$.

27. (Propuesto en Selectividad 2011, Baleares)
Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & x \end{pmatrix}$
a) Resuelve la ecuación $\det(A) = 0$.
b) ¿En qué casos admite inversa la matriz A?

28. (Propuesto en Selectividad 2011, País Vasco)
Dada la matriz A:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
a) Contesta razonadamente a la siguiente pregunta ¿existe algún valor de $\alpha \in \mathbf{R}$ tal que A no tenga inversa para ese valor?
b) Calcula, en caso de que sea posible, la matriz inversa de A^2 para $\alpha = 0$.

29. Sea la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & t & t \\ -1 & t & -1 \end{pmatrix}$
a) Halla su rango en función del valor de t.
b) Calcula su inversa para el valor o valores de t para los que el determinante de esa matiz vale 1.

30. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = A - kI$, donde k es una constante e I es la matriz identidad de orden 2.

a) Determina los valores de k para los que B no tiene inversa.
b) Calcula B^{-1} para $k = -1$.

31. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde λ es un número real.
Encuentra los valores de λ para los que la matriz AB tiene inversa.

32. Una matriz A es ortogonal cuando $A \cdot A^t = I$. Demuestra que el determinante de una matriz ortogonal vale 1 ó −1.

33. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
a) Calcula AA^t, $\det(AA^t)$ y $(AA^t)^{-1}$.
b) Las matrices AA^t y $(AA^t)^{-1}$ anteriores son simétricas. ¿Es esto una coincidencia?

Soluciones

1. a) 5. b) 58. c) 0.
2. a) $m = -1$. b) $a = 3$. c) $k = \pm\frac{1}{2}$.
3. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -12 & 18 \end{pmatrix}$; $|A| = 12$; $|B| = 1$; $|A| \cdot |B| = 12$. $|A \cdot B| = 12$.
4. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -12 & 18 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -4 & 20 \end{pmatrix}$; $A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -7 & 20 \end{pmatrix}$; $B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -5 & 18 \end{pmatrix}$.
5. a) $|A| = -12$. b) $|B| = 9$. c) $|C| = 16$.
6. $|A| = 180$. **7.** 0. **8**. 1. **9**. $a^2 b$. **11.** 972.
13. $|A \cdot B| = -4$; $|2A| = 32$; $|A^2| = 16$; $|A^{-1}| = \frac{1}{4}$; $|B^{-1}| = -1$; $-5|B| = 5$; $|-5B| = 125$;
$|A| + |B| = 3$. $|A + B|$ no puede saberse.
14. 4.
15. $|B| = \frac{1}{5}$.
16. a) –3/2. b) 63.
17. a) 2. b) 2. c) 3.
18. a) 1 si $a = 6$; 2 si $a \neq 6$. b) 1 si $a = 1$; 2 si $a \neq 1$.c) Siempre es 2. d) 1 si $a = \pm 2$; 2 si $a \neq \pm 2$.
19. a) $k \neq 0, -3$ y 3, rango 3. Si $k = 0, -3$ o 3, rango 2. b) $k \neq 1$, rango 3; Si $k = 1$, rango 2.
c) $k \neq 1$, rango(A) = 3; $k = 1$, rango(A) = 2.
20. 2.
21. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/8 \\ 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$. c) No es invertible.

22. a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. b) $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1/4 & -1/4 & 3/4\\ 1/2 & 1/2 & -1/2\\ 3/4 & -1/4 & -1/4\end{pmatrix}$. c) No tiene inversa.

23. a) $a\neq 1$ y $a\neq 3$. b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-7 & -1 & 2\\ 12 & 2 & -3\\ -8 & -1 & 2\end{pmatrix}$

24. a) $X=A^{-1}-A$. b) $X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

25. a) $k\neq \pm 1$. b) $X=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

26. $P=\begin{pmatrix}2a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$, $a\neq 0$.

27. a) $x = 0$ ó $x = 1/2$. b) Si $x\neq 0$ y $x\neq 1/2$.

28. a) No. b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

29. a) Si $t\neq 0$ y $t\neq 2$, rango = 3. Si $t = 0$ o $t = 2$, el rango es 2.

b) $t = -1$. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

30. a) $k=-2+\sqrt{3}$ o $k=-2-\sqrt{3}$. b) $B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

31. $\lambda\neq -2$ y $\lambda\neq 1/2$.

33. a) $A\cdot A^t=\begin{pmatrix}21 & 11\\ 11 & 10\end{pmatrix}$; $\left|A\cdot A^t\right|=89 \Rightarrow \left(A\cdot A^t\right)^{-1}=\begin{pmatrix}10/89 & -11/89\\ -11/89 & 21/89\end{pmatrix}$

b) No es una coincidencia; siempre se cumple.