TEMA 6. Ángulos, distancias, simetrías…
Problemas Resueltos

Ángulos entre rectas y planos

1. Dadas las rectas r y s de ecuaciones: $r \equiv x-1 = y = 1-z$; $s \equiv \begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}$.

a) Comprueba que se cortan y halla su punto de corte.
b) Determina el ángulo que forman r y s.
c) Halla la ecuación del plano que contiene a r y s.

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas r y s son:

$$r \equiv x-1 = y = 1-z = t \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}; \quad s \equiv \begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1+2h \\ y = h \\ z = 1-h \end{cases}$$

Igualando las componentes de ambas rectas:

$$\begin{cases} 1+t = -1+2h \\ t = h \\ 1-t = 1-h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+t = -1+2h \\ t = h \end{cases} \Rightarrow t = h = 2.$$

Las rectas se cortan en el punto $P(3, 2, -1)$.

b) Ángulo (r, s) = ángulo $(\vec{v}_r, \vec{v}_s) \to \vec{v}_r = (1, 1, -1)$, $\vec{v}_s = (2, 1, -1)$.

Aplicando el producto escalar:

$$\cos(r, s) = \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{2+1+1}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

Luego, ángulo $(r, s) = \arccos\left(\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$ = 19,47º.

c) El plano queda determinado por el punto $P(3, 2, -1)$ y por los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 & 2 \\ y-2 & 1 & 1 \\ z+1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv -(y-2)-(z+1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv y+z-1 = 0.$$

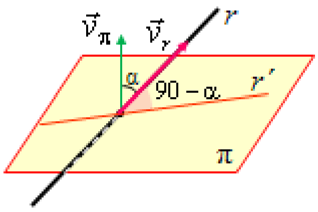
2. (Propuesto en Selectividad en 2012, Murcia)

Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π, siendo:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1} \text{ y } \pi: x-2y-z=4$$

Solución:

El ángulo que forma una recta con un plano es el complementario del que determinan los vectores $\vec{v}_r$, de dirección de la recta, con $\vec{v}_\pi$, normal al plano. (En la figura, r' es la proyección de r sobre π.)



Esto es, ángulo $(r, \pi) = 90º$ – ángulo $(\vec{v}_\pi,\ \vec{v}_r)$.

En consecuencia, sen (r, π) = $\cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \dfrac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|}$.

Como $\vec{v}_r = (2,\ -1,\ 1)$; $\vec{v}_\pi = (1,\ -2,\ -1) \Rightarrow \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \dfrac{2+2-1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ α = 60. Por tanto, el ángulo que forman la recta y el plano es 30º.

3. Halla el ángulo que forma el plano $\pi: x+y+z=0$ con la recta de ecuaciones $r: \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=1 \end{cases}$.

Solución:

El seno del ángulo (r, π), sen (r, π) = $\cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \dfrac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|}$, siendo $\vec{v}_r$ el vector de dirección de la recta y $\vec{v}_\pi$ el vector normal al plano.

El plano $\pi: x+y+z=0$ tiene como vector normal $\vec{v}_\pi$ = (1, 1, 1).

La recta $r: \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow r: \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases} \to \vec{v}_r$ = (–1, 1, –1).

Luego: sen $(r, \pi) = \left|\dfrac{(-1,1,-1)\cdot(1,-1,1)}{\sqrt{3}\sqrt{3}}\right| = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$ ángulo(r, π) = arcsen (1/3) = 19,47º

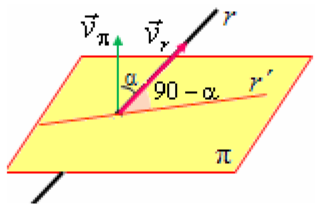
4. Halla el ángulo que forma la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ con el plano $\pi \equiv \sqrt{3}x - z = 3$.

Solución:

Su valor es el complementario del ángulo formado por el vector de dirección de la recta y el vector característico del plano.

Por tanto, el seno del ángulo (r, π),

sen (r, π) = $\cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \dfrac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|}$.



Para obtener $\vec{v}_r$ se expresa la recta en sus ecuaciones paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$$

Se tiene: $\vec{v}_r$ = (0, 0, 1); $\vec{v}_\pi = (\sqrt{3},\quad 0,\quad -1)$.

Luego: sen $(r,\ \pi) = \dfrac{(0,0,1)\cdot(\sqrt{3},0,-1)}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{3+1}} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow$ ángulo(r, π) = 150º → Se toma 30º, el más pequeño.

5. Determina el ángulo que forman los planos:

$\pi_1: 3x - y + 2z + 1 = 0$ y $\pi_2: 2x + y - 5z - 1 = 0$

Solución:

El ángulo (π_1, π_2) es el mismo que el que forman sus vectores característicos.

Como $\vec{v}_{\pi 1}$ = (3, –1, 2) y $\vec{v}_{\pi 2}$ = (2, 1, –5), se tiene que

$$\cos(\vec{v}_{\pi 1}, \vec{v}_{\pi 2}) = \frac{\vec{v}_{\pi 1} \cdot \vec{v}_{\pi 2}}{|\vec{v}_{\pi 1}| \cdot |\vec{v}_{\pi 2}|} = \frac{6 - 1 - 10}{\sqrt{14}\sqrt{30}} = \frac{-5}{2\sqrt{105}}$$

Por tanto, el ángulo (π_1, π_2) = arccos $\left(\frac{-5}{2\sqrt{105}}\right) \approx 75{,}88^\circ$

6. Halla el ángulo que forman los planos $\pi_1: 2x - y + z = 0$ y $\pi_2: x + y + 2z - 1 = 0$

Solución:

Los vectores característicos son: $\vec{v}_{\pi 1}$ = (2, –1, 1) y $\vec{v}_{\pi 2}$ = (1, 1, 2).

El coseno del ángulo que forman es

$$\cos(\vec{v}_{\pi 1}, \vec{v}_{\pi 2}) = \frac{\vec{v}_{\pi 1} \cdot \vec{v}_{\pi 2}}{|\vec{v}_{1\pi}| \cdot |\vec{v}_{\pi 2}|} = \frac{2 - 1 + 2}{\sqrt{4 + 1 + 1} \cdot \sqrt{1 + 1 + 2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ángulo} = 60^\circ.$$

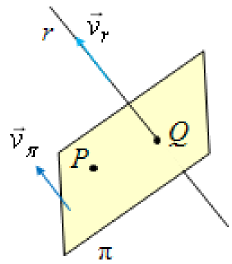
Paralelismo y perpendicularidad

7. Sea el punto *P* = (1, 2, 3) y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-1}$.

a) Halla la ecuación del plano π que pasa por *P* y es perpendicular a la recta *r*.

b) Halla el punto de corte entre la recta *r* y el plano π.

Solución:



a) El plano π viene determinado por el punto dado, *P*, y por el vector de dirección de la recta, pues el vector característico (normal) del plano es igual al de dirección de la recta: $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r$.

Como *P* = (1, 2, 3) y $\vec{v}_r$ = (2, 3, –1), su ecuación es:

$$\pi \equiv 2\cdot(x-1) + 3\cdot(y-2) - 1\cdot(z-3) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + 3y - z - 5 = 0.$$

b) El punto *Q*, de corte de la recta con el plano hallado, se obtiene resolviendo el sistema recta–plano. Para ello conviene obtener las ecuaciones de la recta en forma paramétrica y sustituirlas en la ecuación del plano:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv 2(1+2t) + 3(-2+3t) - (5-t) - 5 = 0 \Rightarrow 14t - 14 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Por tanto, *Q* = (3, 1, 4).

8. (Propuesto en Selectividad en 2011, Asturias)

Se considera la recta $r:\begin{cases}2x-y-5=0\\ x+z-2=0\end{cases}$.

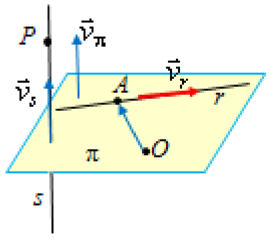
a) Determina el plano π que contiene a *r* y pasa por el origen de coordenadas.

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto (1, 0, 1).

Solución:

a) Si se expresa la recta en su forma paramétrica se tiene:

$$r:\begin{cases}2x-y-5=0\\ x+z-2=0\end{cases} \Leftrightarrow r:\begin{cases}x=t\\ y=-5+2t\\ z=2-t\end{cases}$$



El plano pedido viene determinado por el punto *O* y por los vectores ***OA*** = (0, –5, 2) y el de dirección de la recta, $\vec{v}_r$ = (1, 2, –1).

Su ecuación será: $\pi:\begin{cases}x=t\\ y=2t-5h\\ z=-t+2h\end{cases} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x & 1 & 0\\ y & 2 & -5\\ z & -1 & 2\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi: x+2y+5z=0$.

b) El vector de dirección de la recta perpendicular a π será $\vec{v}_\pi$ = (1, 2, 5); como debe pasar por el punto *P*(1, 0, 1) su ecuación es:

$$s:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=2\lambda\\ z=1+5\lambda\end{cases}.$$

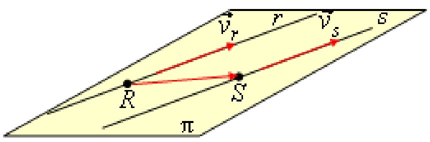
9. Sea α ≠ 0 un número real, y las rectas de ecuaciones: $r\equiv\dfrac{x}{2}=y=\dfrac{z}{\alpha}$; $s\equiv\begin{cases}x=1+4\lambda\\ y=2\lambda\\ z=3-2\lambda\end{cases}$.

Determina el valor de α para el que *r* y *s* son paralelas. En ese caso, halla la ecuación general del plano que las contiene.

Solución:

Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma dirección: sus vectores de dirección deben ser proporcionales. Esto es: $\vec{v}_r=k\cdot\vec{v}_s$.

En este caso: $\vec{v}_r$ = (2, 1, α) y $\vec{v}_s$ = (4, 2, –2).



Para que (2, 1, α) = *k* · (4, 2, –2), $k=\dfrac{1}{2}$; luego $\alpha=\dfrac{1}{2}\cdot(-2)=-1$.

El plano que contiene a ambas rectas queda determinado por un punto *R* ∈ *r*, y los vectores ***RS*** y $\vec{v}_s$, siendo *S* ∈ *s*.

Tomando *R* = (0, 0, 0) y *S* = (1, 0, 3) se tiene que ***RS*** = (1, 0, 3); y el plano buscado será:

$$\pi\equiv\begin{cases}x=1+\mu+4\lambda\\ y=\quad 2\lambda\\ z=3+3\mu-2\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 4\\ y & 0 & 2\\ z-3 & 3 & -2\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi\equiv 3x-7y-z=0.$$

10. Dadas las rectas de ecuaciones: $r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases}$; $r´:\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+bz=0 \end{cases}$

a) ¿Qué relación debe existir entre *a* y *b* para que *r* y *r´* sean paralelas?
b) ¿Y para que sean perpendiculares?

Solución:

Ambas cuestiones se resuelven comparando los vectores de dirección de las rectas, que pueden obtenerse multiplicando vectorialmente los vectores normales de los planos que las definen.

En este caso:

$$\vec{v}_r = (1,\ 1,\ 1)\times(1,\ -1,\ 1) = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,\ 0,\ -2).$$

$$\vec{v}_{r´} = (1,\ 1,\ 1)\times(a,\ 0,\ b) = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & b \end{vmatrix} = (b,\ a-b,\ -a).$$

a) Las rectas serán paralelas cuando sus vectores de dirección lo sean; esto implica que $\vec{v}_r = k\vec{v}_{r´}$.

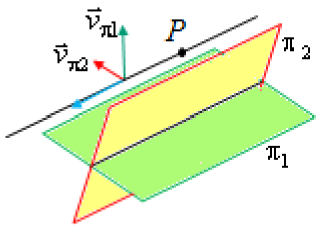
Luego: $(2,\ 0,\ -2) = k\cdot(b,\ a-b,\ -a) \Rightarrow \begin{cases} 2=kb \\ 0=a-b \Rightarrow a=b, \text{ y ambos distintos de 0.} \\ 2=ka \end{cases}$

b) Las rectas serán perpendiculares cuando sus vectores de dirección lo sean.
Por tanto,

$$\vec{v}_r\cdot\vec{v}_{r´}=0 \Rightarrow (2,\ 0,\ -2)\cdot(b,\ a-b,\ -a)=0 \Rightarrow 2b+2a=0 \Rightarrow a=-b.$$

11. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,\ 3,\ -2)$ y que sea paralela a los planos: $\pi_1: 2x-y+z+1=0$ y $\pi_2: -x+3y-z+1=0$

Solución:



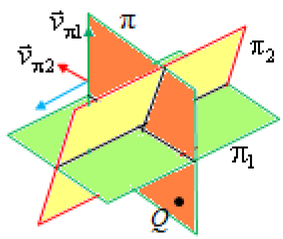
El vector de dirección de la recta buscada será $\vec{v}_{\pi1}\times\vec{v}_{r2}$:

$$\vec{v}_{\pi1}\times\vec{v}_{r2} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2,1,5).$$

Su ecuación es: $\begin{cases} x=1-2t \\ y=3+t \\ z=-2+5t \end{cases}$.

12. Halla la ecuación del un plano perpendicular a los planos π_1 y π_2, del problema anterior, que pase por el punto $Q(2,\ 0,\ -1)$.

Solución:



El vector normal del plano pedido es $\vec{v}_{\pi1}\times\vec{v}_{r2} = (-2,\ 1,\ 5)$.

Por tanto, su ecuación es: $\pi: -2x+y+5z+d=0$.

Por contener al punto *Q*: $-4-5+d=0 \Rightarrow d=9$.

El plano es: $\pi: -2x+y+5z+9=0$.

13. Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases}, \quad s \equiv x-1=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}.$$

a) Comprueba que se cortan perpendicularmente.
b) Halla la ecuación del plano que las contiene.
c) Halla la recta perpendicular común a *r* y *s*.

<u>Solución:</u>

a) Las ecuaciones paramétricas de ambas rectas son:

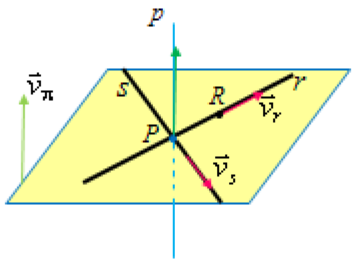
$$r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=7-2y \\ y=y \\ z=2-y/2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=7-4t \\ y=2t \\ z=2-t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-4, 2, -1).$$

$$s \equiv x-1=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=1+h \\ y=3h \\ z=-1+2h \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (1, 3, 2).$$

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son perpendiculares, ya que

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (-4, 2, -1)\cdot(1, 3, 2) = -4 + 6 - 2 = 0.$$

Por tanto, las rectas son perpendiculares.



Para comprobar que se cortan basta con ver que el sistema que determinan tiene solución. Este sistema es:

$$\begin{cases} 7-4t=1+h \\ 2t=3h \\ 2-t=-1+2h \end{cases}, \text{ cuya solución es } t=\frac{9}{7} \text{ y } h=\frac{6}{7}.$$

El punto de corte se obtiene sustituyendo $t=\frac{9}{7}$ en *r* o $h=\frac{6}{7}$ en *s* $\rightarrow P\left(\frac{13}{7}, \frac{18}{7}, \frac{5}{7}\right)$.

b) El plano pedido queda determinado, por ejemplo, por $R(7, 0, 2) \in r$ y por los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-7 & -4 & 1 \\ y & 2 & 3 \\ z-2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi\text{: } 7(x-7)+7y-14(z-2)=0 \Rightarrow \pi\text{: } x+y-2z-3=0.$$

c) La perpendicular común es la que pasa por *P* y lleva la dirección del vector característico del plano, $\vec{v}_\pi = (1, 1, -2)$.

Su ecuación es: $p \equiv \begin{cases} x=13/3+\lambda \\ y=18/7+\lambda \\ z=5/7-2\lambda \end{cases}$.

14. Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \quad \lambda \\ z = \ -\lambda \end{cases}; \quad s \equiv \begin{cases} x = \quad \mu \\ y = 2+2\mu \\ z = 0 \end{cases}.$$

a) Estudia la posición relativa de las rectas *r* y *s*.
b) Halla la ecuación de una recta que sea perpendicular simultáneamente a *r* y *s*.

Solución:

a) Hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores:

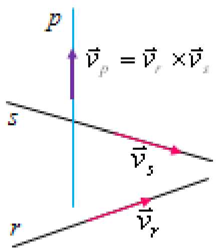
$\vec{v}_r = (1, 1, -1)$, $\vec{v}_s = (1, 2, 0)$ y $\mathbf{RS} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0)$

donde *R* es un punto de *r* y *S* un punto de *s*.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas *r* y *s* se cruzan.

b) La dirección de todas las retas perpendiculares a las dadas es la del vector $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2, -1, 1).$$



Una de las infinitas rectas perpendiculares es: $p \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$.

Observación: Del enunciado no se deduce que se pida la recta perpendicular común.

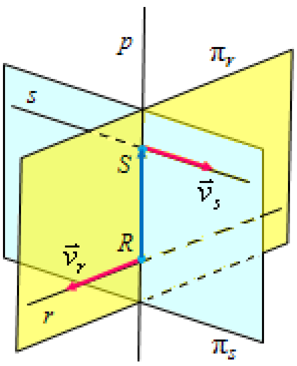
15. Se consideran las rectas *r* y *s* de ecuaciones respectivas, $r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de *r* y *s*.
b) Determina la recta que corta perpendicularmente a *r* y *s*.
c) Halla la distancia ente *r* y *s*.

Solución:

a) Como el sistema $r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \cap s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$, formado por las dos rectas, es incompatible (pues no puede ser a la vez $z = 0$ y $z = 2$), las rectas se cruzan.

b) La perpendicular común es la intersección de los planos π_r y π_s.
El plano π_r viene determinado por la recta *r*, a la que contiene, y por el vector $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$.
El plano π_s viene determinado por la recta *s*, a la que contiene, y por el vector $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$.



Como $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, \quad 0, \quad 1)$, dichos planos son:

$$\pi_r:\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y-1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi_r\text{: } y = 1;$$

$$\pi_s:\begin{cases} x = 0 \\ y = h \\ z = 2 + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z-2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi_s\text{: } x = 0.$$

Por tanto, la perpendicular común es: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$.

<u>De otra forma</u>:
Se toman dos puntos genéricos, R y S, y se impone la condición de que el vector ***RS*** sea perpendicular a los vectores de dirección de ambas rectas, $\vec{v}_r = (1, 0, 0)$ y $\vec{v}_s = (0, 1, 0)$
Puntos genéricos de r y s son, respectivamente, $R(t, 1, 0)$ y $S(0, h, 2) \Rightarrow$ ***RS*** $= (-t, h-1, 2)$
Como ***RS*** debe ser perpendicular debe cumplirse, a la vez, que ***RS*** $\cdot\ \vec{v}_r = 0$ y ***RS*** $\cdot\ \vec{v}_s = 0$.
Esto es:

RS $\cdot\ \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (-t, h-1, 2)\cdot(1, 0, 0) = 0 \Rightarrow -t = 0 \to t = 0$.

RS $\cdot\ \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (-t, h-1, 2)\cdot(0, 1, 0) = 0 \Rightarrow h-1 = 0 \to h = 1$.

Luego: $R(0, 1, 0)$; $S(0, 1, 2)$; ***RS*** $= (0, 0, 2) \equiv (0, 0, 1)$. Por tanto, la recta R–S es: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$.

c) Como se conocen los puntos R y S, la distancia entre las rectas es la misma que la distancia entre los puntos R y S. Esto es,

$$d(r,s) = d(R,S) = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = 2.$$

<u>Nota:</u> Utilizando la fórmula $d(r,s) = \dfrac{\left|\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{SR}\right]\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|}$, siendo $\overrightarrow{SR}$ un vector que va de r a s: $R \in r$ y $S \in s$. (Aquí, R y S son puntos arbitrarios de r y s, respectivamente.)

16. Sean las rectas de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$.
a) Comprueba que se cruzan en el espacio.
b) Halla un punto de r y otro de s tales que el vector con origen en uno y extremo en el otro sea perpendicular a ambas rectas. Halla la recta perpendicular común a r y a s.
<u>Solución:</u>
a) Las ecuaciones paramétricas de las rectas dadas son:

$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \to$ Restando $E2 - E1$: $y = 3 - z \Rightarrow x = 1 + 2z$.

Haciendo $z = t$ se tiene: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \to$ Un punto $A \in r$ es $A(1, 3, 0)$; y $\vec{v}_r = (2, -1, 1)$.

En la recta s haciendo $z = h \Rightarrow$ $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = h \end{cases} \rightarrow$ Un punto $B \in s$ es $B(2, -5, 0)$; $\vec{v}_s = (0, 0, 1)$.

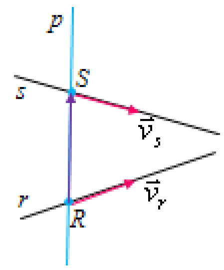
Como los vectores $\boldsymbol{AB} = (1, -8, 0)$, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son linealmente independientes, pues

$\begin{vmatrix} 1 & -8 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 16 \neq 0$, se concluye que la rectas se cruzan.

b) Sean R y S puntos genéricos de r y s, respectivamente:

$R = (1 + 2t, 3 - t, t)$; $S = (2, -5, h)$

El vector $\boldsymbol{RS} = (1 - 2t, -8 + t, h - t)$ debe ser perpendicular a los vectores de dirección de ambas rectas, $\vec{v}_r = (2, -1, 1)$ y $\vec{v}_s = (0, 0, 1)$.



En consecuencia:

$\boldsymbol{RS} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow h - 6t - 10 = 0$.

$\boldsymbol{RS} \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow h - t = 0$.

Resolviendo el sistema se tiene: $t = h = 2$.

Los puntos R y S son: $R(5, 1, 2)$; $S(2, -5, 2) \Rightarrow \boldsymbol{RS} = (-3, -6, 0)$.

La recta, perpendicular común a r y s es: $p \equiv \begin{cases} x = 5 - 3\lambda \\ y = 1 - 6\lambda \\ z = 2 \end{cases}$.

Observación:

Puede comprobarse que el vector $\boldsymbol{RS} = (-3, -6, 0)$ es perpendicular a $\vec{v}_r$ y a $\vec{v}_s$.

17. Halla las ecuaciones de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas, siendo:

$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2}$, $\qquad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$

Solución:

Puntos genéricos de r y s son, respectivamente,

$P = (t, 1 - 2t, 3 + 2t)$, $\quad Q = (2 + 3h, h, -1 - h)$

De donde: $\overrightarrow{PQ} = (2 + 3h - t, -1 + h + 2t, -4 - h - 2t)$. Este vector debe ser perpendicular a los de dirección de r y s.

Multiplicando escalarmente ($\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_r = 0$, $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_s = 0$), se tiene:

$\begin{cases} h + 9t = -4 \\ 11h + t = -9 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{-5}{14}$ y $h = -\frac{11}{14}$.

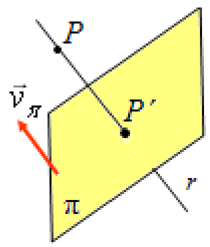
Con esto:

$P\left(\frac{-5}{14}, \frac{24}{14}, \frac{32}{14}\right)$ y $\overrightarrow{PQ} = \left(0, \frac{-5}{2}, \frac{-5}{2}\right) \equiv (0, 1, 1)$

La recta perpendicular común es: $\begin{cases} x = -5/14 \\ y = 24/14 + p \\ z = 32/14 + p \end{cases}$.

Proyecciones en el espacio

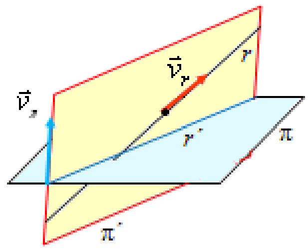
18. Halla la proyección de $P(1, –1, 0)$ sobre el plano $\pi: 3x + y - 2z + 7 = 0$:
Solución:



1) Se halla la recta perpendicular a π que contiene a $P \to r: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1+t \\ z = -2t \end{cases}$.

2) Se halla el corte entre r y π → $\pi: 3(1+3t)+(-1+t)-2(-2t)+7=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t = -9/14$.
Por tanto, el punto $P´= (–13/14, –23/14, 18/14)$.

19. Halla la proyección ortogonal de de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ sobre el plano $\pi \equiv x - 3y + 2z + 12 = 0$.
Obtén la solución de las dos formas posibles:
1) Mediante el corte de dos planos; 2) Proyectando dos puntos de r sobre el plano.
Solución:



1) La recta proyectada, r´, es la intersección del plano π con el plano π´ que contiene a r y es perpendicular a π. Queda definido por el punto (1, 1, 2) ∈ r y los vectores $\vec{v}_r = (2, 1, 2)$ y $\vec{v}_\pi = (1, -3, 2)$.
Su ecuación es:

$$\pi´\equiv \begin{cases} x = 1+2h+t \\ y = 1+h-3t \\ z = 2+2h+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y-1 & 1 & -3 \\ z-2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi´\equiv 8x - 2y - 7z + 8 = 0.$$

Luego, la recta r´ es:

$$r´\equiv \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{(haciendo } z = 22\lambda\text{)}\ r´\equiv \begin{cases} x = 25\lambda \\ y = 4+23\lambda \\ z = 22\lambda \end{cases}.$$

2) Proyectando los puntos $A(1, 1, 2)$ y $B(–1, 0, 0)$ de r sobre el plano π.

Las rectas p_A y p_B, perpendiculares al plano son: $p_A \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-3t \\ z = 2+2t \end{cases}$ y $p_B \equiv \begin{cases} x = -1+t \\ y = -3t \\ z = 2t \end{cases}$.

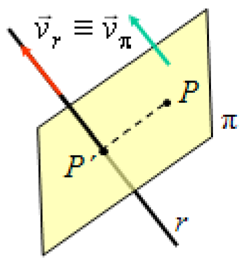
Cortan al plano en:
$A´ \to (1+t) - 3(1-3t) + 2(2+2t) + 12 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow A´(0, 4, 0)$
$B´ \to (-1+t) - 3(-3t) + 2(2t) + 12 = 0 \Rightarrow t = -11/14 \Rightarrow B´(-25/14, 33/14, -22/14)$

Como $\mathbf{A´B´} = (–25/14, –23/14, –22/14) = (25, 23, 22) \Rightarrow r´\equiv \begin{cases} x = 25\lambda \\ y = 4+23\lambda \\ z = 22\lambda \end{cases}$.

20. Halla la proyección del punto $P(2, -1, 1)$ sobre la recta $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{2}$.

Solución:

La proyección de P sobre la recta r se obtiene hallando el corte de dicha recta con el plano π, perpendicular a ella que pasa por P.



Como $\vec{v}_r$ = (3, 1, 2), el plano π será:

$$3(x-2)+(y+1)+2(z-1)=0 \Rightarrow \pi:\ 3x+y+2z-7=0.$$

Sustituyendo las ecuaciones paramétricas de r: $\begin{cases} x=3+3t \\ y=-1+t \\ z=2t \end{cases}$, en la ecuación del plano se obtiene P':

$$3(3+3t)+(-1+t)+2(2t)-7=0 \Rightarrow 14t+1=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{14}.$$

Por tanto, P': $\begin{cases} x=3+3(-1/14)=39/14 \\ y=-1-1/14=-15/14 \\ z=-2/14 \end{cases} \Rightarrow P'=\left(\dfrac{39}{14},-\dfrac{15}{14},-\dfrac{2}{14}\right)$.

Simetrías

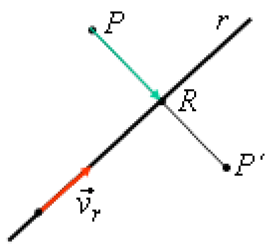
21. Halla las coordenadas del punto P' simétrico de $P(2, 0, -1)$ respecto de la recta $r\equiv\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{3}$.

Solución:

Si P' es el simétrico de P respecto la recta, se cumplen dos cosas:

1) El punto medio del segmento PP', R, debe ser de la recta.

2) El vector ***PR*** debe ser perpendicular al vector $\vec{v}_r$ de dirección de la recta. Esto es, debe cumplirse que $\vec{v}_r\cdot$ ***PR*** = 0.



Un punto genérico de la recta es: $R = (-1-2t,\ 2+t,\ -1+3t)$.

Por tanto:

PR $= (-1-2t,\ 2+t,\ -1+3t) - (2, 0, -1) = (-3-2t,\ 2+t,\ 3t)$

Condición 2): $\vec{v}_r\cdot$ ***PR*** $= 0 \Rightarrow (-2, 1, 3)\cdot(-3-2t,\ 2+t,\ 3t) = 6+4t+2+t+9t=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 14t=-8 \Rightarrow t=-4/7$

Luego, $R = (1/7, 10/7, -19/9)$

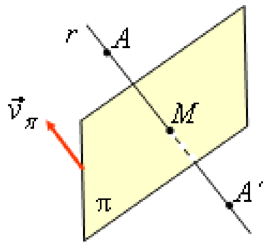
Condición 1): Si $P' = (a, b, c)$, el punto medio entre P y P' es: $R=\left(\dfrac{a+2}{2},\dfrac{b}{2},\dfrac{c-1}{2}\right)$

Como $R = (1/7, 10/7, -19/9)$, se cumple que:

$$\frac{a+2}{2}=\frac{1}{7} \Rightarrow a=-\frac{12}{7};\quad \frac{b}{2}=\frac{10}{7} \Rightarrow b=\frac{20}{7};\quad \frac{c-1}{2}=-\frac{19}{7} \Rightarrow c=-\frac{31}{7}.$$

Luego, $P'=\left(-\dfrac{12}{7},\dfrac{20}{7},-\dfrac{31}{7}\right)$.

22. (Propuesto en Selectividad en 2011, Islas Baleares)
Dados el punto A = (1, 3, 0) y el plano $\pi: x + 2y + z - 1 = 0$, determina las coordenadas del punto $A´$, simétrico del punto A respecto del plano π. Calcula la distancia de $A´$ al plano π.
Solución:
Sea $A´$ el simétrico de A respecto de π. Ambos puntos, A y $A´$, estarán en la recta r, perpendicular a π por A.



Como v_π = (1, 2, 1), se deduce que $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Puede tomarse $A´$ como un punto genérico de r:
$A´ = (1 + \lambda, 3 + 2\lambda, \lambda)$

La distancia de ambos puntos al plano debe ser la misma: $d(A, \pi) = d(A', \pi)$.
La distancia de A a π es:

$$d(A, \pi) = \left| \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 3 - 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} \right| = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6},$$

La distancia de $A´$ a π es:

$$d(A', \pi) = \left| \frac{(1+\lambda) + 2\cdot(3 + 2\lambda) + \lambda - 1}{\sqrt{6}} \right| = \left| \frac{6 + 6\lambda}{\sqrt{6}} \right|.$$

Como ambas distancias deben ser iguales,

$$\left| \frac{6 + 6\lambda}{\sqrt{6}} \right| = \sqrt{6} \Rightarrow |6\lambda + 6| = 6 \Rightarrow \begin{cases} 6\lambda + 6 = 6 \Rightarrow \lambda = 0 \\ -6\lambda - 6 = 6 \Rightarrow \lambda = -2 \end{cases}.$$

Para λ = 0, $A´$= (1, 3, 0), que hay que descartar por tratarse del punto A dado.
Para λ = –2, $A´$= (–1, –1, –2), que es el punto buscado.

De otra forma:
Sea A= (x_0, y_0, z_0) el simétrico de A respecto de π.
Ambos puntos, A y $A´$ estarán en la recta r, perpendicular a π por A. Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre A y $A´$.

Como v_π = (1, 2, 1), se deduce que $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Corte de la recta r con el plano → π: (1 + λ) + 2(3 + 2λ) + λ – 1 = 0 ⇒ 6λ + 6 = 0 ⇒ λ = –1
Por tanto, M = (0, 1, –1).

Punto medio de A y $A´$: $\left(\frac{1 + x_0}{2}, \frac{3 + y_0}{2}, \frac{z_0}{2} \right)$.

Como M = (0, 1, –1) = $\left(\frac{1 + x_0}{2}, \frac{3 + y_0}{2}, \frac{z_0}{2} \right) \Rightarrow$

$$0 = \frac{1 + x_0}{2} \Rightarrow x_0 = -1;\ 1 = \frac{3 + y_0}{2} \Rightarrow y_0 = -1;\ -1 = \frac{z_0}{2} \Rightarrow z_0 = -2$$

Por tanto, $A´$ = (–1, –1, –2).

Distancias

23. Halla la distancia del punto P a la recta r en los siguientes casos:

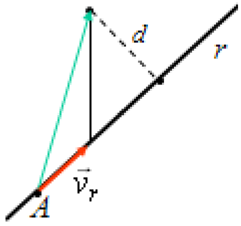
a) $P(2, 0, -1)$; $r \equiv \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{3}$.

b) $P(1, -1, 3)$; $r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$ c) $P(16, 0, 0)$; $r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases}$,

Solución:

La distancia de un punto P a una recta r viene dada por

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}, \text{ siendo } A \in r.$$



a) En este caso:

$A = (-1, 2, -1)$, $P = (2, 0, -1)$, $\overrightarrow{AP} = (3, -2, 0)$, $\vec{v}_r = (-2, 1, 3)$

Producto vectorial:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-6, -9, -1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-9)^2 + (-1)^2} = \sqrt{118}$$

Módulo de $\vec{v}_r$: $\left|\vec{v}_r\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Por tanto, $d(P,r) = \dfrac{\sqrt{118}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{59}{7}}$.

b) En este caso: $A = (1, 1, 1)$, $P = (1, -1, 3)$, $\overrightarrow{AP} = (0, -2, 2)$, $\vec{v}_r = (1, -1, 2)$

El producto vectorial $\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r$ vale,

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2, 2, 2) \Rightarrow d(P,r) = \frac{\sqrt{4+4+4}}{\sqrt{1+1+4}} = \sqrt{2}$$

c) Para obtener $\vec{v}_r$ puede expresarse la recta en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 7-2y \\ y = y \\ z = 2-y/2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 7-4t \\ y = 2t \\ z = 2-t \end{cases}$$

Por tanto, $\vec{v}_r = (-4, 2, -1)$; $A = (7, 0, 2)$, $P = (16, 0, 0) \to \overrightarrow{AP} = (9, 0, -2)$,

El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 9 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (4, 17, 18) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right| = \sqrt{4^2 + 17^2 + 18^2} = \sqrt{629}$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $\left|\vec{v}_r\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{21} \Rightarrow d(P,r) = \dfrac{\sqrt{629}}{\sqrt{21}}$.

24. Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ cuya distancia al punto $P(1, 0, 2)$ sea $\sqrt{5}$.

Solución:
Sea $X \in r$ el punto pedido: $X = (\lambda, 3-\lambda, 1+2\lambda)$. Se desea que:

$$d(X,P) = \sqrt{(\lambda-1)^2 + (3-\lambda)^2 + (-1+2\lambda)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow 6\lambda^2 - 12\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

El punto es $X = (1, 2, 3)$.

25. Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y - z = 4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$.

a) Comprueba que la recta es paralela al plano.
b) Halla la distancia de r a π.

Solución:
a) La recta será paralela al plano si su vector de dirección $\vec{v}_r$ es perpendicular al característico del plano, $\vec{v}_\pi = (1, 1, 1)$. Además, ningún punto de la recta puede ser del plano.

Se expresa r en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y - z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 8 - 3t \\ y = t \\ z = -4 + 2t \end{cases} \to \vec{v}_r = (-3, 1, 2).$$

Como $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = (-3, 1, 2) \cdot (1, 1, 1) = -3 + 1 + 2 = 0 \Rightarrow$ Los vectores son perpendiculares; y la recta paralela al plano, ya que el punto $P(8, 0, -4) \in r$ pero no a π.

b) La distancia de un punto a un plano viene dada por la expresión:

$$d(r, \pi) = d(P = (8, 0, -4) \in r, \pi : x + y + z - 2 = 0) = \frac{8 + 0 - 4 - 2}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

26. Halla la distancia entre la recta determinada por el punto $S(1, 0, 0)$ y el vector $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y el plano $\pi \equiv x - y + z - 2 = 0$

Solución:
La recta y el plano son paralelos pues el vector director de la recta, $\vec{v} = (1, 1, 0)$, y el vector característico del plano, $\vec{v}_\pi = (1, -1, 1)$, son perpendiculares, ya que:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}_\pi = (1, 1, 0) \cdot (1, -1, 1) = 1 - 1 = 0.$$

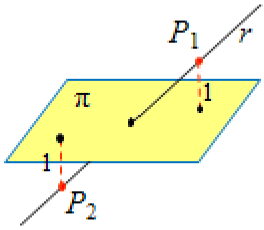
Por tanto, la distancia entre el plano y la recta viene dada por la distancia de cualquier punto de la recta, por ejemplo $S = (1, 0, 0)$ al plano. Esta distancia es:

$$d(S, \pi) = \left| \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 2}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

27. Halla los dos puntos de la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-2}$ que están a distancia 1 del plano $\pi \equiv 2x + 2y + z - 5 = 0$.

Solución:

Las ecuaciones cartesianas de la recta son: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2t \end{cases}$.



Luego, un punto genérico de r es $P = (2 + t, 1 + t, -2t)$.

Se desea que $d(P, \pi) = 1$.
Esto es:

$$d(P,\pi) = \frac{2(2+t)+2(1+t)+(-2t)-5}{\pm\sqrt{4+4+1}} = 1 \Rightarrow \frac{2t+1}{\pm 3} = 1.$$

- Para el denominador positivo: $+3 \to 2t + 1 = 3 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow P_1 = (3, 2, -2)$.
- Para el denominador negativo: $-3 \to 2t + 1 = -3 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow P_2 = (0, -1, 4)$.

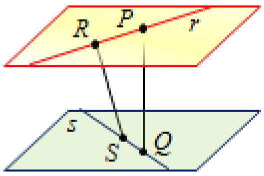
28. Halla la distancia entre las rectas r y s de ecuaciones:

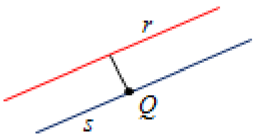
a) $r \equiv \begin{cases} x = 3 - t \\ y = \quad t \\ z = 11 - 4t \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x = -5 + h \\ y = \quad h \\ z = 4 \end{cases}$.   b) $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = 3 + k \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x = -1 + k \\ y = -1 + 3k \\ z = 4 - 2k \end{cases}$.

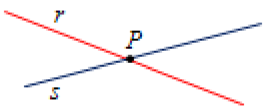
Solución:

Dependiendo de su posición relativa, la distancia mínima entre dos rectas r y s es:

- (si se cruzan) $\to$ la existente entre el plano paralelo a s que pasa por r y el plano paralelo a r que pasa por s. (Esa distancia coincide con el módulo del vector ***PQ***, perpendicular a los de dirección de ambas rectas.)
- (si son paralelas) $\to$ la existente entre cualquier punto de s y la recta r.
- (si se cortan) $\to$ cero.







La distancia entre dos rectas (que se cruzan) viene dada por la expresión

$d(r,s) = \dfrac{\left|\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{RS}\right]\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|}$, siendo $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ los vectores de dirección respectivos, y $\overrightarrow{RS}$ un vector que va de r a s: $R \in r$ y $S \in s$. (Si las rectas se cortasen esta distancia valdría 0; si las rectas fuesen paralelas, cuestión que se detecta comparando sus vectores de dirección, esta fórmula no es válida.)

a) En este caso:

$$\vec{v}_r = (-1, 1, -4),\ \vec{v}_s = (1, 1, 0);\ \boldsymbol{RS} = (-5, 0, 4) - (3, 0, 11) = (-8, 0, -7).$$

Por tanto,

$$\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{RS}\right] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 7 + 7 - 32 = -18.$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (4, -4, -2) \Rightarrow \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6$$

Luego: $d(r, s) = \left|\dfrac{-18}{6}\right| = 3$.

b) Si se toma: $R(2, 1, 3) \in r$; $S(-1, -1, 4) \in s$, se tiene que $\mathbf{RS} = (-3, -2, 1)$.
Por otra parte, $\vec{v}_r = (2, -1, 1)$ y $\vec{v}_s = (1, 3, -2)$.

El producto mixto, $\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overline{RS}\right] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ las rectas se cortan.

Aquí no sería necesario calcular el producto vectorial, $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1, 5, 7)$; ni el módulo, $\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| = \sqrt{1 + 25 + 49} = \sqrt{75}$; ni la distancia, que es 0: $d(r, s) = \left|\dfrac{0}{\sqrt{75}}\right| = 0$.

29. Halla la ecuación del plano π que es paralelo y equidistante a las rectas r y s de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 - t \\ y = \quad t \\ z = 11 - 4t \end{cases} ; \quad s \equiv \begin{cases} x = -5 + h \\ y = \quad h \\ z = 4 \end{cases}.$$

<u>Observación</u>: Estas son las rectas del apartado a) del problema anterior.
<u>Solución</u>:
Si un plano es paralelo a una recta, su vector característico es perpendicular al de dirección de la recta. Por tanto, si el plano es paralelo a las rectas r y s, su vector característico será $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$, que es perpendicular a ambos: $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (4, -4, -2)$

Por tanto, la ecuación del plano será $\pi : 4x - 4y - 2z + d = 0$. (Falta por determinar d.)
Como el plano debe equidistar de las rectas r y s, y como $d(r, s) = 3$ (ver el problema anterior), su distancia a cada recta debe ser 3/2. Esto es, $d(r, \pi) = 3/2 = d(s, \pi)$.
Por ser r y π paralelos, la distancia de r a π es la misma que la distancia del punto $R = (3, 0, 11)$ de r a π.
Por tanto,

$$d(R, \pi) = \left|\frac{4 \cdot 3 - 4 \cdot 0 - 2 \cdot 11 + d}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2}}\right| = \frac{-10 + d}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow d = 19.$$

La ecuación del plano buscado será $\pi : 4x - 4y - 2z + 19 = 0$.

<u>Observación</u>: También podría considerarse la posibilidad $d(R, \pi) = \dfrac{-10 + d}{-6} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow d = 1$.

No obstante, la solución válida es la primera, $d = 19$.

30. Halla la distancia entre las rectas r y s de ecuaciones:

a) $r \equiv \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 7x - z = 8 \end{cases}$; $s \equiv x - 2 = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$. b) $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}$; $s \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Solución:

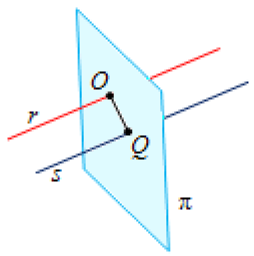
a) Expresando las rectas en forma paramétrica se tiene:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -4 + 3t \\ z = -8 + 7t \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + h \\ y = 2 + 3h \\ z = 3 + 4h \end{cases}$$

Por tanto: $\vec{v}_r = (1, 3, 7)$, $\vec{v}_s = (1, 3, 4)$ y $\overrightarrow{RS} = (2, 2, 3) - (0, -4, -8) = (2, 6, 11)$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 11 \end{vmatrix} = 9 - 9 = 0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes. En consecuencia, las rectas r y s se cortan. Por tanto, la distancia entre ellas es 0.

b) Las rectas son paralelas: $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x = 2 + h \\ y = 3h \\ z = 1 - h \end{cases}$.



En este caso, $d(r, s) = d((0, 0, 0) \in r, s)$. Esta distancia puede calcularse, además de con la fórmula correspondiente, hallando el punto de corte del plano π, perpendicular a r (y a s) por $O(0, 0, 0) \in r$ con la recta s; obteniéndose que $d(r, s) = d(O, Q)$.

La ecuación del plano π es: $\pi \equiv x + 3y - z = 0$; corta a la recta s cuando

$(2 + h) + 3(3h) - (1 - h) = 0 \Rightarrow h = -1/11$.

Luego $Q = \left(\dfrac{21}{11}, \dfrac{-3}{11}, \dfrac{12}{11}\right)$

Con esto, $d(r, s) = d(O, Q) = \sqrt{\left(\dfrac{21}{11}\right)^2 + \left(\dfrac{-3}{11}\right)^2 + \left(\dfrac{12}{11}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{54}{11}}$.

Planos bisector y mediador

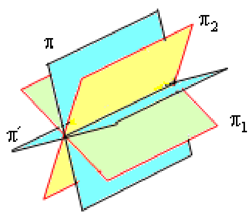
31. Halla el plano bisector de los planos $\pi_1 \equiv x + 2y + z + 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + y - z - 6 = 0$.

Solución:

Si el punto $P(x, y, z)$ pertenece al plano bisector π, debe cumplir que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$.

Luego,

$$\frac{x + 2y + z + 3}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2x + y - z - 6}{\pm\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} \Rightarrow \frac{x + 2y + z + 3}{\sqrt{6}} = \frac{2x + y - z - 6}{\pm\sqrt{6}}.$$



Simplificando se obtiene los dos planos bisectores:

$\pi : x + 2y + z + 3 = +(2x + y - z - 6) \Rightarrow \pi : x - y - 2z - 9 = 0$

$\pi' : x + 2y + z + 3 = -(2x + y - z - 6) \Rightarrow \pi' : 3x + 3y - 3 = 0 \Leftrightarrow \pi' : x + y - 1 = 0$.

32. Comprueba para los planos del ejercicio anterior:
a) Que el plano π´ forma con cada uno de los dos iniciales, π_1 y π_2, un ángulo que es la mitad que el que determinan los planos π_1 y π_2.
b) Que los planos bisectores son perpendiculares.
Solución:
a) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es el determinado por sus vectores característicos $\vec{v}_{\pi 1}=(1, 2, 1)$ y $\vec{v}_{\pi 2}=(2, 1, -1)$

Como $\cos(\vec{v}_{\pi 1}, \vec{v}_{\pi 2})=\dfrac{\vec{v}_{\pi 1}\cdot \vec{v}_{\pi 2}}{|\vec{v}_{\pi 1}|\cdot|\vec{v}_{\pi 2}|}=\dfrac{2+2-1}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$ ⇒ ángulo (π_1, π_2) = arccos (1/2) = 60º.

El ángulo que forman los planos π´ y π_1, es el determinado por los vectores $\vec{v}_{\pi 1}=(1, 2, 1)$ y $\vec{v}_{\pi'}=(1, 1, 0)$:

$$\cos(\vec{v}_{\pi'}, \vec{v}_{\pi 1})=\frac{\vec{v}_{\pi'}\cdot \vec{v}_{\pi 1}}{|\vec{v}_{\pi'}|\cdot|\vec{v}_{\pi 1}|}=\frac{1+2}{\sqrt{6}\sqrt{2}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}=30^{\circ}$, efectivamente, es la mitad del que forman los planos π_1 y π_2.

b) Los vectores característicos de los planos bisectores son:
$\vec{v}_{\pi}=(1, -1, 2)$ y $\vec{v}_{\pi'}=(1, 1, 0)$
Como su producto escalar es 0: $\vec{v}_{\pi}\cdot\vec{v}_{\pi'}=(1, -1, 2)\cdot(1, 1, 0)=1-1=0$, dichos planos son perpendiculares.

33. Halla el plano mediador de los puntos $P(1, -1, 0)$ y $Q(-1, 3, 2)$.
Solución:
Si $X=(x, y, z)$ es un punto del plano buscado, cumplirá que: $d(X, P)=d(X, Q)$
Esto es:

$$d(X,P)=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2}=d(X,Q)$$
$$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1+z^2=x^2+2x+1+y^2-6y+9+z^2-4z+4$$
$$\Rightarrow x-2y-z+3=0$$

La ecuación del plano mediador es $x-2y-z+3=0$.

34. Dados los puntos del espacio $P(0, 0, 0)$ y $Q(0, 1, 2)$, halla la condición que debe cumplir un punto de coordenadas $A(x, y, z)$ para que esté a la misma distancia de P y Q.
Solución:
Las distancias entre los puntos valen:

$$d(A,P)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ; \quad d(A,Q)=\sqrt{x^2+(y-1)^2+(z-2)^2}$$

La condición que debe cumplirse es que

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2+(z-2)^2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$x^2+y^2+z^2=x^2+(y-1)^2+(z-2)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=x^2+y^2-2y+1+z^2-4z+4 \Rightarrow 2y+4z-5=0$$

Evidentemente es la ecuación de un plano: el plano mediatriz de los puntos P y Q.

Otros problemas

35. a) Halla la recta r que pasa por el punto $P(1, -1, -2)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+2y+3z+6=0$.
b) Halla la ecuación de la recta s que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(-1, -3, -4)$.
c) Estudia la posición relativa de r y s. Si se cortan, calcula el punto de corte.
d) Calcula la distancia del punto $A(1, 0, 0)$ al plano π' que pasa por el punto $P(1, -1, -2)$ y es paralelo a π.
Solución:
a) La recta r queda definida por $P(1, -1, -2)$ y el vector $\vec{v}_\pi = (1, 2, 3)$, normal al plano π.

Su ecuación es: $r:\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=-2+3t \end{cases}$.

b) La recta s está determinada por el punto $A(1, 0, 0)$ y por el vector $\boldsymbol{AB} = (-1, -3, -4) - (1, 0, 0) = (-2, -3, -4)$.

Su ecuación es: $s:\begin{cases} x=1-2h \\ y=\ \ -3h \\ z=\ \ -4h \end{cases}$.

c) Para determinar la posición relativa de ambas rectas hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores:
$\vec{v}_r = (1, 2, 3)$, $\vec{v}_s = (-2, -3, -4)$ y $\boldsymbol{AP} = (1, -1, -2) - (1, 0, 0) = (0, -1, -2)$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2+2\cdot(-1)=0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes; lo que indica que las rectas se cortan.

Para hallar el punto de corte se resuelve el sistema: $r:\left\{\begin{matrix} x=1+t & x=1-2h \\ y=-1+2t \equiv & y=-3h \\ z=-2+3t & z=-4h \end{matrix}\right\}:s$.

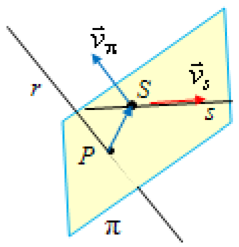
$\begin{cases} 1+t=1-2h \\ -1+2t=-3h \\ -2+3t=-4h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ h=-1 \end{cases} \to$ Punto de corte: $C(3, 3, 4)$.

d) El plano π' está determinado por el vector normal a él, que es $\vec{v}_\pi = (1, 2, 3)$, y por el punto $P(1, -1, -2)$.
Su ecuación es: $\pi' \equiv (x-1)+2(y+1)+3(z+2)=0 \Rightarrow \pi' \equiv x+2y+3z+7=0$.
La distancia de A a π' es:

$$d(A, \pi') = \left|\frac{1+7}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}\right| = \frac{8}{\sqrt{14}}.$$

36. Dado el punto $P(0, 8, 3)$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$.

a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y a la recta s.
b) Calcula la ecuación de la recta r, perpendicular al plano hallado y que contiene a P.
<u>Solución:</u>



a) El plano π, que contiene a P y a s, queda definido por el punto P y los vectores $\vec{v}_s$ y ***PS***, siendo S cualquier punto de s.
Las ecuaciones paramétricas de s son:

$$s \equiv \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} x = y - 7 \\ y = 2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{si } z = h) \to s: \begin{cases} x = -7 + 2h \\ y = \quad 2h \\ z = \quad h \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (2, 2, 1).$$

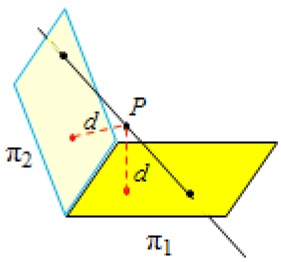
Si $S = (-7, 0, 0)$, ***PS*** = (–7, 0, 0) – (0, 8, 3) = (–7, –8, –3).
Luego, la ecuación del plano será:

$$\pi: \begin{cases} x = \quad 2h - 7t \\ y = 8 + 2h - 8t \\ z = 3 + h - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & -7 \\ y-8 & 2 & -8 \\ z-3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 2x - y - 2z + 14 = 0.$$

b) La recta perpendicular a π lleva la dirección del vector normal al plano, $\vec{v}_\pi = (2, -1, -2)$;

como debe contener a $P(0, 8, 3)$, su ecuación será: $r \equiv \begin{cases} x = \quad 2\lambda \\ y = 8 - \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$

37. Encuentra los puntos de la recta $r: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$ que equidisten de los planos $\pi_1 \equiv 3x + 4y - 1 = 0$ y $\pi_1 \equiv 4x - 3z - 1 = 0$.
<u>Solución:</u>



Como la recta tiene por ecuaciones, $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = \quad 2t \end{cases}$,

un punto genérico de ella es $P = (-1 + 2t \quad 1 + 3t \quad 2t)$
Se desea que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$.
Por tanto:

$$d(P, \pi_1) = \frac{3(-1+2t) + 4(1+3t) - 1}{\sqrt{9+16}} = \frac{4(-1+2t) - 3(2t) - 1}{\pm\sqrt{16+9}} = d(P, \pi_2) \Rightarrow \frac{18t}{5} = \frac{2t-5}{\pm 5}.$$

- Si se considera el denominador +5 ⇒ $18t = 2t - 5 \Rightarrow t = -5/16 \Rightarrow P_1 = \left(\dfrac{-26}{16}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{-10}{16}\right)$.
- Si se considera el denominador –5 ⇒ $18t = -2t + 5 \Rightarrow t = 1/4 \Rightarrow P_2 = \left(\dfrac{-2}{4}, \dfrac{7}{4}, \dfrac{2}{4}\right)$.

38. Dadas las rectas de ecuaciones: $r \equiv \begin{cases} 3x - y = -1 \\ 7x - z = -4 \end{cases}$ y $s \equiv x - 2 = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$.

a) Estudia su posición relativa.
b) Si se cruzan, calcula la distancia mínima entre ellas.
Solución:

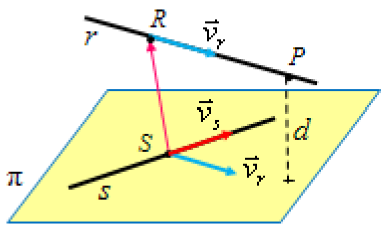
a) Estudiando la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$, donde $R \in r$ y $S \in s$, se determina la posición relativa de ambas rectas: si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano.
Las ecuaciones paramétricas de las retas dadas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = 4 + 7t \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + h \\ y = 2 + 3h \\ z = 3 + 4h \end{cases}$$

Por tanto: $\vec{v}_r$ = (1, 3, 7), $\vec{v}_s$ = (1, 3, 4) y $\overrightarrow{RS}$ = (2, 2, 3) – (0, 1, 4) = (2, 1, –1)

Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -7 + 27 - 35 \neq 0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes ⇔ las rectas *r* y *s* se cruzan.

b) La distancia entre ambas rectas es igual a la de un punto cualquiera *P* de *r* al plano π que contiene a *s* y es paralelo a *r*, cuya ecuación es:

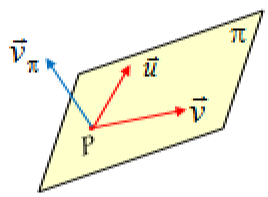


$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 + h + t \\ y = 2 + 3h + 3t \\ z = 3 + 4h + 7t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ y-2 & 3 & 3 \\ z-3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x - y - 4 = 0$$

Por tanto, $d(r, s) = d\left(P(0,1,4) \in r, \pi\right) = \left| \dfrac{3 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - 4}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} \right| = \dfrac{5}{\sqrt{10}}$

39. a) Sea π el plano determinado por el punto *P*(2, 2, 2) y los vectores $\vec{u}$ = (1, 0, –1) y $\vec{v}$ = (1, 1, 0). Calcula el ángulo que forma el plano π con la recta que pasa por los puntos O(0, 0, 0) y *Q*(2, –2, 2).
b) Calcula el punto simétrico de *O*(0, 0, 0) respecto del plano $x - y + z - 2 = 0$.
Solución:
a) El vector normal del plano, que es ortogonal a los dos dados, se obtiene multiplicándolos vectorialmente:



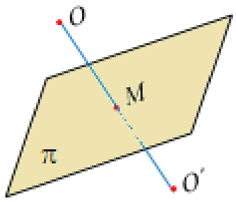
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$$

Por tanto, el plano pedido es
$1 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 2) = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv x - y + z - 2 = 0$

La recta que pasa por O y Q es: $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = -2t \\ z = 2t \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$.

El seno del ángulo (r, π), sen $(r, \pi) = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \dfrac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|}$, siendo $\vec{v}_r = (1, -1, 1)$ el vector de dirección de la recta y $\vec{v}_\pi = (1, -1, 1)$ el vector normal al plano.
Como ambos vectores son iguales, la recta es perpendicular al plano.

b) El punto pedido, $O´$, estará en la recta r y a la misma distancia del plano que O.
El punto M, de corte de la recta y el plano, es el punto medio entre O y $O´$.
M: $t-(-t)+t-2=0 \Rightarrow t = 2/3$;
Luego $M = (2/3, -2/3, 2/3)$.
Si $O´ = (a, b, c) \Rightarrow M = (a/2, b/2, c/2) = (2/3, -2/3, 2/3)$
$\Rightarrow a = 4/3, b = -4/3, c = 4/3 \Rightarrow O´ = (4/3, -4/3, 4/3)$.

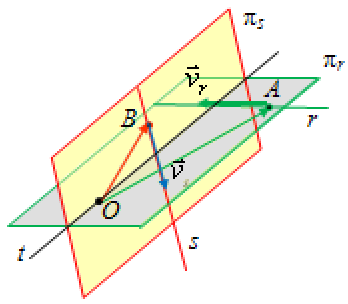


40. (Propuesto en Selectividad en 2006, Madrid)
Sean las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

a) Halla la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.
b) Halla la recta perpendicular común a las retas r y s.
Solución:
a) La recta pedida se obtiene por intersección de los planos π_r, que contiene a r y pasa por el origen, y π_s, que contiene a s y pasa por el origen.
Plano π_r:
Determinado por $O(0, 0, 0)$ y por los vectores $\boldsymbol{OA} = (-1, 2, 0)$ y $\vec{v}_r = (-2, 2, -4)$; el punto $A(-1, 2, 0)$ pertenece a la recta r.
Su ecuación es:

$$\pi_r: \begin{vmatrix} x & -1 & -2 \\ y & 2 & 2 \\ z & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_r : 4x + 2y - z = 0$$



Plano π_s:
Determinado por $O(0, 0, 0)$ y por los vectores $\boldsymbol{OB} = (2, -1, -2)$ y $\vec{v}_s = (3, 1, 1)$; el punto $B(2, -1, -2)$ pertenece a la recta s.
Su ecuación es:

$$\pi_s: \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ y & -1 & 1 \\ z & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_s : x - 8y + 5z = 0$$

Por tanto, $t: \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$.

b) Puntos genéricos de r y s son, respectivamente,
$R = (-1 - 2h, 2 + 2h, -4h)$, $S = (2 + 3p, -1 + p, -2 + p)$

El vector $\boldsymbol{SR}$ = (–3 –2h – 3p, 3 + 2h – p, 2 – 4h – p), que indica la dirección de todas las rectas que se apoyan en r y s, debe ser perpendicular a los de dirección de r y s:

$\vec{v}_r$ = (–2, 2, –4) y $\vec{v}_s$ = (3, 1, 1).

Multiplicando escalarmente ($\boldsymbol{SR} \cdot \vec{v}_r = 0$, $\boldsymbol{SR} \cdot \vec{v}_s = 0$), se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 24h + 8p + 4 = 0 \\ -8h - 11p - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h = \frac{-3}{50} \text{ y } p = \frac{-8}{25}.$$

Con esto:

$$R = \left(\frac{-44}{50}, \frac{94}{50}, \frac{12}{50}\right) = \left(\frac{-22}{25}, \frac{47}{25}, \frac{6}{25}\right),\ S = \left(\frac{26}{25}, \frac{-33}{25}, \frac{-58}{25}\right) \text{ y}$$

$$\boldsymbol{RS} = \left(\frac{-48}{25}, \frac{80}{25}, \frac{64}{25}\right) \equiv (-3, 5, 4).$$

La recta perpendicular común será: $\begin{cases} x = -22/25 - 3t \\ y = 47/25 + 5t \\ z = 6/25 + 4t \end{cases}$.

41. Considera la recta y el plano siguientes:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4} \qquad \pi: 2x + 4y + 4z = 5$$

a) Comprueba que la recta r y el plano π son paralelos.
b) Calcula la distancia entre el plano π y la recta r.
c) Calcula la ecuación implícita del plano π´ que es perpendicular a π y contiene a r.

Solución:

a) El vector de dirección de la recta es: $\vec{v}_r$ = (2, –5, 4).

El vector característico del plano: $\vec{v}_\pi$ = (2, 4, 4).

Ambos vectores son perpendiculares, pues $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi$ = (2, – 5, 4) · (2, 4, 4) = 0.

Además, el punto P(1, –5, –3) ∈ r no pertenece al plano, pues:

2 · 1 + 4 · (–5) + 4 · (–3) = –30 ≠ 5.

En consecuencia, la recta es paralela al plano.

b) La distancia de π a r es igual a la distancia del punto P de r al plano.

$$d(P, \pi) = d\left(P(1,-5,-3), \pi: 2x + 4y + 4z - 5 = 0\right) = \left|\frac{2 - 20 - 12 - 5}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}}\right| = \frac{35}{6}.$$

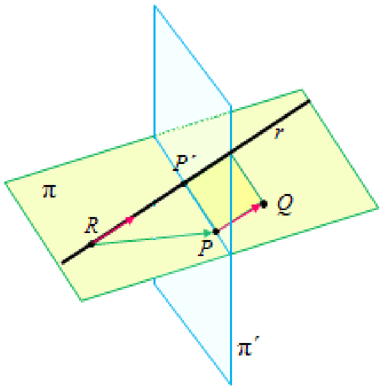
c) El plano pedido viene determinado por el punto P y los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_\pi$.

Su ecuación será:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 2\mu \\ y = -5 - 5\lambda + 4\mu \\ z = -3 + 4\lambda + 4\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y+5 & -5 & 4 \\ z+3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - z - 5 = 0.$$

42. (Propuesto en Selectividad en 2012, Castilla León)
Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos *P*(2, 1, 3) y *Q*(1, 3, 1); los otros dos sobre una recta *r* que pasa por el punto *R*(–4, 7, –6).
a) Calcula la ecuación de la recta *r*. (0,5 puntos)
b) Calcula la ecuación general del plano que contiene al cuadrado. (1 punto)
c) Halla las coordenadas de uno de los otros vértices. (1,5 puntos)
Solución:
a) El vector director de la recta *r* es ***PQ*** = (1, 3, 1) – (2, 1, 3) = (–1, 2, –2).

Luego, $r \equiv \begin{cases} x = -4 - t \\ y = 7 + 2t \\ z = -6 - 2t \end{cases}$.



b) Para determinar el plano se necesita otro vector:
RP = (2, 1, 3) – (–4, 7, –6) = (6, –6, 9) ≡ (2, –2, 3)
El plano será:

$$\pi: \begin{cases} x = -4 - t + 2h \\ y = 7 + 2t - 2h \\ z = -6 - 2t + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+4 & -1 & 2 \\ y-7 & 2 & -2 \\ z+6 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

Þ $\pi: 2(x+4) - (y-7) - 2(z+6) = 0 \Rightarrow \pi: 2x - y - 2z + 3 = 0$.

c) Por ejemplo, *P´*, que será el proyectado de *P* sobre *r*. Dicho punto se obtiene mediante el corte de la recta con el plano π´, que contiene a *P* y es perpendicular a la recta *r*. Su vector característico es: $\vec{v}_{\pi'} = \vec{v}_r = (-1,\ 2,\ -2)$.
Luego, $\pi': -(x-2) + 2(y-1) - 2(z-3) = 0 \Rightarrow \pi: -x + 2y - 2z + 6 = 0$.
El punto *P´* se obtiene sustituyendo las ecuaciones de la recta *r* en la del plano π´.

$$-(-4-t) + 2(7+2t) - 2(-6-2t) + 6 = 0 \Rightarrow 9t + 36 = 0 \Rightarrow t = -4 \Rightarrow P' = (0,\ -1,\ 2).$$

De otra forma:
Otro vértice del cuadrado es el punto de la recta que está a distancia $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$, el lado del cuadrado, del punto *P*. Como el punto genérico de la recta es $X(-4-t,\quad 7+2t,\quad -6-2t)$, se tendrá que $d(P, X \in r) = \sqrt{(-6-t)^2 + (6+2t)^2 + (-9-2t)^2} = d(P, Q) = 3 \Rightarrow t = -4$, como solución única (lo que confirma que se trata de un cuadrado), uno de los vértices en la recta es $P' = (0,\ -1,\ 2)$.

43. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones:
$\pi_1 \equiv 3x - 4y + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - 2y + z + 9 = 0$
¿Qué puntos del eje *OY* equidistan de ambos planos?
Solución:
Sea *P* un punto de ese lugar. Debe cumplir que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$:

$$\frac{3x-4y+5}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2x-2y+z+9}{\pm\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1}} \Leftrightarrow \frac{3x-4y+5}{5} = \frac{2x-2y+z+9}{\pm 3}.$$

Se tendrá:
Para +3: $\dfrac{3x-4y+5}{5} = \dfrac{2x-2y+z+9}{3} \Rightarrow x + 2y + 5z + 30 = 0 \qquad (1)$

Para –3: $\dfrac{3x-4y+5}{5}=\dfrac{2x-2y+z+9}{-3} \Rightarrow 19x-22y+5z+60=0$ (2)

Son los planos bisectores de los planos dados.

Los puntos del eje OY son de la forma $(0, y, 0)$; esto es, $x = 0$ y $z = 0$. Como deben ser de los planos anteriores, se tendrá:

(1) $2y + 30 = 0 \Rightarrow y = -15$. Punto $(0, -15, 0)$.

(2) $-22y + 60 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{30}{11}$. Punto $(0, 30/11, 0)$.

44. (Propuesto en Selectividad en 2009, Navarra)

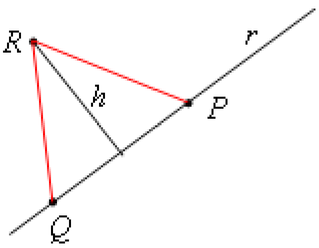
Dado el punto $R(1, -1, 2)$, encuentra los puntos P y Q de la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ x+2y+2z-6=0 \end{cases}$$

tales que PQR sea un triángulo equilátero.

<u>Solución:</u>

La situación gráfica es la que se indica en la figura.



Para que el triángulo PQR sea equilátero, las distancias entre cada dos vértices deben ser iguales:

$$d(R,P)=d(R,Q)=d(P,Q)=l.$$

Además, en todo triángulo equilátero, la relación entre la medida del lado y de la altura es: $h^2=l^2-\dfrac{l^2}{4}=\dfrac{3l^2}{4} \Rightarrow l=\dfrac{2h}{\sqrt{3}}$.

En este caso, $h=d(R,r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AR}\times\vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}$, con $A \in r$.

Para calcular esa distancia conviene obtener las ecuaciones paramétricas de r:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ x+2y+2z-6=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+y=4-z \\ x+2y=6-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E1-E2 \\ E2-E1 \\ z=t \end{matrix} \to r \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=2-t \\ z=t \end{cases}$$

Por tanto: $R = (1, -1, 2)$, $A = (2, 2, 0)$, $\overrightarrow{AR} = (-1, -3, 2)$, $\vec{v}_r = (0, -1, 1)$

Luego, $\overrightarrow{AR}\times\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,\ 1,\ 1)$

Como $\left|\overrightarrow{AR}\times\vec{v}_r\right|=\sqrt{3}$ y $\left|\vec{v}_r\right|=\sqrt{2}$, se tendrá que $d(R,r)=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=h$.

De $l=\dfrac{2h}{\sqrt{3}} \Rightarrow l=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. Luego, la $d(R,P)=\sqrt{2}$

Si P es un punto genérico de r, $P=(2,\ \ 2-t,\ \ t)$, entonces, como $R(1, -1, 2)$,

$$d(R,P)=\sqrt{2} \Rightarrow d(R,P)=\sqrt{1^2+(3-t)^2+(t-2)^2}=\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t^2-10t+12=0 \Rightarrow t = 2 \text{ o } t = 3.$$

Para $t = 2$, $P(2, 0, 2)$; y para $t = 3$, $Q(2, -1, 3)$.

Puede comprobarse que $d(P,Q)=\sqrt{2}$.

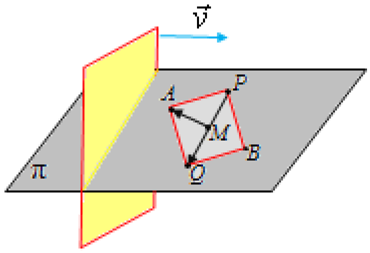
45. Los puntos $P(1, –1, 1)$ y $Q(3, –3, 3)$ son dos vértices opuestos de un cuadrado que está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación $x+y=0$.

a) Determina los otros dos vértices.
b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por los vértices obtenidos en a).
c) Calcula el perímetro del cuadrado construido.

Solución:

a) El plano π que contiene al cuadrado está definido por el punto P (o por el Q) y los vectores ***PQ*** = (2, –2, 2) y $\vec{v}$ = (1, 1, 0), normal del plano dado.

Su ecuación es $\pi \equiv \begin{cases} x = 1+2t+h \\ y = -1-2t+h \\ z = 1+2t \end{cases} \Leftrightarrow x-y-2z=0$.



(Obsérvese que se da la circunstancia de que ***PQ*** es perpendicular a $\vec{v}_\pi$.)

El punto medio del segmento *P–Q*, *M*(2, –2, 2), es donde se cortan las diagonales del cuadrado. Por tanto se cumplirá que los vectores ***PM*** y ***MA*** sean perpendiculares y tengan el mismo módulo.

El vector ***PM*** = (1, –1, 1); y su módulo vale $\sqrt{3}$.

El vector ***MA*** debe ser perpendicular a ***PM***, tener también módulo $\sqrt{3}$ y pertenecer al plano π.

Como $\vec{v}$ = (1, 1, 0) es perpendicular a ***PQ***, está en el plano π y tiene módulo $\sqrt{2}$, entonces

$$\boldsymbol{MA} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1,\ 1,\ 0)$$

Como ***OA*** = ***OM*** + ***MA***, las coordenadas de *A* serán:

$$A = (2, -2, 2) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1,\ 1,\ 0) = \left(2+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ -2+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ 2\right).$$

Análogamente, las coordenadas de *B* son:

$$B = (2, -2, 2) - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1,\ 1,\ 0) = \left(2-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ -2-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ 2\right).$$

b) La recta definida por los puntos *A* y *B* es la que pasa por *M* con vector de dirección $\vec{v}$ = (1, 1, 0). Su ecuación será

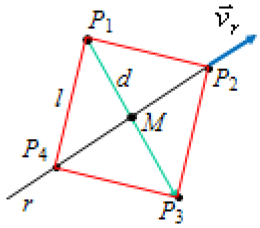
$$r \equiv \begin{cases} x = 2+t \\ y = -2+t \\ z = 2 \end{cases}$$

c) El perímetro del cuadrado es:

$$p = 4\cdot l = 4\cdot d(P, A) = 4\cdot\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} = 4\sqrt{6}.$$

46. Los puntos $P_1(2, -3, 3)$ y $P_3(0, 1, -1)$ son vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices de ese cuadrado sabiendo que están en la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$.

Solución:



La situación debe ser la que se muestra en el siguiente dibujo.
Para que el problema tenga solución, la dirección del vector $\boldsymbol{P_1P_3}$ debe ser perpendicular al vector de dirección de la recta y, además, la distancia de cada uno de los puntos a la recta debe ser la misma (esto último equivale a que el punto medio de $P_1 - P_3$ es de la recta).
Se tiene:

$\boldsymbol{P_1P_3} = (0, 1, -1) - (2, -3, 3) = (-2, 4, -4)$; $\vec{v}_r = (-2, 1, 2)$.

Como $\boldsymbol{P_1P_3} \cdot \vec{v}_r = (-2, 4, -4) \cdot (-2, 1, 2) = 4 + 4 - 8 = 0$, los vectores son perpendiculares.

El punto medio de $P_1 - P_3$ es $M = \left(\dfrac{0+2}{2}, \dfrac{1-3}{2}, \dfrac{-1+3}{2}\right) = (1, -1, 1)$

Las ecuaciones paramétricas de r son: $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = -2+t \\ z = -1+2t \end{cases}$. Como puede verse, para $t = 1$, se obtiene el punto $M(1, -1, 1)$.

Por tanto, se verifican las dos premisas necesarias.
Ahora puede observarse:
1) La distancia $d(P_1, P_3)$ es la diagonal, d, del cuadrado.
2) El lado, l, de un cuadrado es igual a $l = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$. (Por Pitágoras: $d^2 = l^2 + l^2$).
3) Por tanto, los vértices P_2 y P_4 serán los puntos de la recta que se encuentren a distancia l de P_1 (o de P_3).

La diagonal vale: $d = d(P_1, P_3) = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$. El lado $l = 3\sqrt{2}$.

Los vértices P_2 y P_4 son las soluciones de la ecuación:

$$d\left(P_1 = (2,-3,3), X \in r, X = (3-2t, -2+t, -1+2t)\right) = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(1-2t)^2 + (1+t)^2 + (-4+2t)^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ o } t = 2.$$

Luego: $P_2 = (3,\ -2,\ -1)$ y $P_4 = (-1,\ 0,\ 3)$.