Vectores. Bases. Producto escalar, vectorial y mixto; y aplicaciones

<u>Observación</u>: La mayoría de los problemas resueltos a continuación se han propuesto en los exámenes de Selectividad.

1. Dados los vectores $\vec{u}$ = (1, 2) y $\vec{v}$ = (−3, 1):
a) Comprueba que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base del espacio vectorial de los vectores del plano.
b) Encuentra las componentes del vector $\vec{w}$ = (−1, 5) en la base { $\vec{u}$, $\vec{v}$ }.

Solución:
a) Los vectores son linealmente independientes pues:
$\lambda(1, 2) + \mu(-3, 1) = (0, 0) \Rightarrow \lambda - 3\mu = 0;\ 2\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ y $\mu = 0$
La única solución del sistema $\begin{cases} \lambda - 3\mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 0 \end{cases}$ es $\lambda = 0$ y $\mu = 0$.
Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un sistema generador, pues cualquier vector (x, y) puede ponerse en función de ellos. En efecto:

$$(x, y) = a(1,2) + b(-3,1) \Rightarrow \begin{cases} a - 3b = x \\ 2a + b = y \end{cases} \Rightarrow a = \frac{\begin{vmatrix} x & -3 \\ y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x+3y}{7};\ b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y-2x}{7}$$

b) Para $\vec{w}$ = (−1, 5) , esto es, $x = -1$, $y = 5$, se tiene: $a = \dfrac{-1+15}{7} = 2$, $b = \dfrac{5+2}{7} = 1$.
Luego $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$.
La comprobación es inmediata: $2\vec{u} + \vec{v}$ = 2(1, 2) + (−3, 1) = (2, 4) + (−3, 1) = (−1, 5) = $\vec{w}$.

---

2. Considera los vectores de $\mathbf{R}^3$:
$\vec{v}_1$ = (−1, 3, 4), $\vec{v}_2$ = (2, −1, −3) y $\vec{v}_3$ = (1, 2k + 1, k + 3).
a) Halla el único valor de k para el cual estos vectores no son una base de $\mathbf{R}^3$.
b) Para un valor de k diferente del que has hallado en el apartado a), ¿cuáles son las componentes del vector $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ en la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$?

Solución:
a) Los vectores no forman base cuando son linealmente dependientes; para ello, el determinante asociado debe ser 0.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2k+1 & k+3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5k - 15 = 0 \Rightarrow k = 3$$

b) Si k ≠ 3, los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ forman una base, pues son linealmente independientes. En consecuencia, las componentes de $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ en función de esa base, son (1, 1, 1).

3. a) Se consideran los vectores: $\mathbf{u_1} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0)$ y $\mathbf{v}_1 = (0, -1, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (1, -2, 0)$. Demostrar que para todo número real a, el vector $(-2a, 3a, a)$ es combinación lineal de $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u}_2$ y también de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.
b) Elegir tres vectores linealmente independientes entre $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ y escribir el otro como combinación lineal de ellos.

Solución:
a) En ambos casos debe cumplirse que el determinante formado por los tres vectores valga 0.

- $(-2a, 3a, a)$ es combinación lineal de $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u}_2$ si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2a & 3a & a \end{vmatrix} = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2a & 3a & a \end{vmatrix} = a - (-a) + 2(-3a + 2a) = 2a - 2a = 0$$

- $(-2a, 3a, a)$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ si $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2a & 3a & a \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2a & 3a & a \end{vmatrix} = a + (3a - 4a) = a - a = 0$$

c) Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 2 = 4$, los vectores $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{v}_1$ son linealmente independientes.

Hay que escribir $\mathbf{v}_2$ en función de $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{v}_1$. Esto es, encontrar las constantes x, y, z, tales que $\mathbf{v}_2 = x\,\mathbf{u_1} + y\,\mathbf{u}_2 + z\,\mathbf{v}_1$.

O sea: $(1, -2, 0) = x(1, 1, 2) + y(-1, 1, 0) + z(0, -1, 1) \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y - z = -2 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$

Por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-2}{4} = -\frac{1}{4}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2-3}{4} = -\frac{5}{4}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{4}$$

Luego:

$$\vec{v}_2 = -\frac{1}{4}\vec{u}_1 - \frac{5}{4}\vec{u}_2 + \frac{2}{4}\vec{v}_1$$

4. Sean *A, B* y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación

$$\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA}$$

a) Calcula el valor que toma *k* en la expresión $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

b) Si *A*(l, 2, −1) y *B*(3, 6, 9), halla las coordenadas del punto *C* que cumple la relación de partida.

Solución:

a) De $\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{AC}$.

Sustituyendo en la igualdad $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, se tiene:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow 4\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

b) $\overrightarrow{AB}$ = (3, 6, 9) − (1, 2, −1) = (2, 4, 10)

Si *O* = (0, 0, 0), entonces:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = (1, 2, -1) + (1/2, 1, 5/2) = (3/2, 3, 3/2)$$

Las coordenadas del punto *C* son (3/2, 3, 3/2).

---

5. Definir el producto escalar de vectores y enunciar su relación con los conceptos de ángulo y distancia entre puntos.

Solución:

Dados dos vectores $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{w} = (a_2, b_2, c_2)$ se define:

- Producto escalar canónico $\quad \vec{v} \cdot \vec{w} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$
- Producto escalar ordinario $\quad \vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{w})$

Obviamente, ambas definiciones son equivalentes.

De la segunda definición se deduce: $\cos(\vec{v},\ \vec{w}) = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$

El módulo de un vector se define como: $\quad |\vec{v}| = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$

La distancia entre dos puntos A y B, d(A, B), es igual al módulo del vector **AB**. Si las coordenadas de esos puntos fuesen, A = (a_1, b_1, c_1) y B = (a_2, b_2, c_2), entonces

AB = $(a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$

d(A, B) = $|\mathrm{AB}| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$

6. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$, calcula:
a) el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$
b) un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$
c) el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Solución:

a) $$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4, -2, 1)$$

b) El vector pedido es $\dfrac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \dfrac{(4,-2,1)}{\sqrt{16+4+1}} = \left(\dfrac{4}{\sqrt{21}}, \dfrac{-2}{\sqrt{21}}, \dfrac{1}{\sqrt{21}} \right)$

c) El área del paralelogramo viene dada por el módulo del producto vectorial, luego:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{21}$$

---

7. Calcula los valores de x e y para que el vector (x, y, 1) sea ortogonal a los vectores (3, 2, 0) y (2, 0, –1).

Solución:
Debe cumplirse que:

$(x, y, 1) \cdot (3, 2, 0) = 0 \Rightarrow 3x + 2y = 0$
$(x, y, 1) \cdot (2, 0, -1) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = 1/2 \rightarrow y = -3/4$.

El vector pedido es: (1/2, –3/4, 1).

---

8. a) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores. Comprobar que si $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = 0$ entonces $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.
b) Calcule los vectores unitarios que sean perpendiculares a los vectores $\vec{u} = (-3, 4, 1)$ y $\vec{v} = (-2, 1, 0)$

Solución:
a) Si $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0 \Rightarrow$
$|\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 \Rightarrow |\vec{u}| = |\vec{v}|$ (La solución $|\vec{u}| = -|\vec{v}|$ no es posible, pues el módulo de un vector siempre es mayor o igual que cero.)

b) El producto vectorial de dos vectores da un vector perpendicular a ambos. Luego,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -2, 5)$$ es perpendicular a los vectores dados.

Los vectores unitarios pedidos son:

$$\pm \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \pm \frac{(-1,-2,5)}{\sqrt{1+4+25}} \rightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}} \right) \text{ y } \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}} \right)$$

9. Sean los puntos A(1, 2, 1), B(2, 3, 1), C(0, 5, 3) y D(−1, 4, 3).
a) Prueba que los cuatro puntos están en el mismo plano. (Halla la ecuación de dicho plano.)
b) Demuestra que el polígono de vértices consecutivos ABCD es rectángulo.
c) Calcula el área de dicho rectángulo.

Solución:
a) Los cuatro puntos pertenecerán al mismo plano si los vectores **AB**, **AC** y **AD** son linealmente dependientes.
Estos vectores son:
AB = (2, 3, 1) − (1, 2, 1) = (1, 1, 0)
AC = (0, 5, 3) − (1, 2, 1) = (−1, 3, 2)
AD = (−1, 4, 3) − (1, 2, 1) = (−2, 2, 2)

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, los vectores, efectivamente, son linealmente dependientes.

El plano que determinan viene dado, por ejemplo, por el punto A y por los vectores **AB** y **AC**.
Su ecuación es:

$$\begin{cases} x = 1 + t - h \\ y = 2 + t + 3h \\ z = 1 + 2h \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-2 & 1 & 3 \\ z-1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + 2z - 1 = 0$$

<u>Observación:</u> Puede verse que los cuatro puntos dados cumplen la ecuación del plano.

b) El cuadrilátero será rectángulo si los vectores **AB** y **BC**, y **AB** y **AD** son ortogonales.
Como: **AB** = (1, 1, 0), **BC** = (–2, 2, 2) y **AD** = (–2, 2, 2)
se tiene: **AB** · **BC** = **AB** · **AD** = (1, 1, 0) · (–2, 2, 2) = 0
Por tanto, se trata de un rectángulo.

c) Al tratarse de un rectángulo, su superficie se halla multiplicando su base por su altura.
La base puede ser el módulo de **AB**; la altura, el módulo de **AD**.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,; \qquad \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$$

Por tanto,
S = $\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{24}$

NOTA: La superficie también podría hallarse mediante el producto vectorial:

$$S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$$

10. Si A, B y C son los puntos de coordenadas (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), respectivamente

a) Calcula el área del triángulo que forman los puntos *A, B* y *C*.

b) Determina el ángulo que forman los vectores ***AB*** y ***AC***.

Solución:

a) El área del triángulo de vértices A, B y C viene dada por $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

Como ***AB*** = (0, 1, 0) − (1, 0, 0) = (−1, 1, 0) y ***AC*** = (0, 0, 1) − (1, 0, 0) = (−1, 0, 1) se tiene:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

Luego:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

b) Por el producto escalar:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{el ángulo que forman es de 60º.}$$

---

11. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores ortogonales y de módulo 1, hallar los posibles valores del parámetro real a para que los vectores $\vec{u} + a\vec{v}$ y $\vec{u} - a\vec{v}$ formen un ángulo de 60º.

Solución:

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman base ortogonal. Entonces, podemos expresar:

$\vec{u} + a\vec{v} = (1, a)$, $\quad\quad \vec{u} - a\vec{v} = (1, -a)$

Como

$$\cos(\vec{u} + a\vec{v}\ ,\ \vec{u} - a\vec{v}\ ) = \frac{(1, a) \cdot (1, -a)}{\sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 + (-a)^2}} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} = \cos 60º = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 2a^2 = 1 + a^2 \Rightarrow 3a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

---

12. Halla la superficie del triángulo de vértices P = (1, 1, 4), Q = (0, 0, 3) y R = $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

Solución:

El triángulo está determinado por los vectores

PQ = (−1, −1, −1) y **RQ** = (−4/3, −2/3, 2/3)

Su superficie será: $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} x \overrightarrow{RQ}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{4}{3}, 2, -\frac{2}{3}\right)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{56}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$

El producto vectorial es: $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{RQ} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -4/3 & -2/3 & 2/3 \end{vmatrix} = (-4/3,\ 2,\ -2/3)$

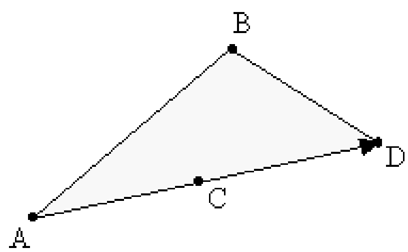
13. Comprueba que los puntos A = (1, 0, 3), B = (−2, 5, 4), C = (0, 2, 5) y D = (−1, 4, 7) son coplanarios. De todos los triángulos que se pueden construir teniendo como vértices tres de esos cuatro puntos, ¿cuál es el de mayor área? Halla el valor de dicha área.

Solución:
Serán coplanarios si los vectores **AB**, **AC** y **AD** son linealmente dependientes.

Veamos:

AB, = (−2, 5, 4) − (1, 0, 3) = (−3, 5, 1)
AC = (0, 2, 5) − (1, 0, 3) = (−1, 2, 2)
AD = (−1, 4, 7) − (1, 0, 3) = (−2, 4, 4)

Como los vectores **AC** y **AD** son proporcionales, **AD** = 2 · **AC**, los tres vectores son linealmente dependientes. (También puede verse que el determinante asociado a esos vectores vale 0.)
Si **AD** = 2 · **AC**, los puntos A, C y D está alineados como se indica en la figura.



El triángulo de mayor superficie que puede construirse es el de vértices A, B y D.

Su superficie es:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{2}\left|(16,10,-2)\right|$$

Luego,

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{16^2+10^2+(-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{360} = 3\sqrt{10}$$

El producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -3 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (16,10,-2)$

---

14. Comprueba si los puntos (1, 2, 3), (1, −2, 4) y (1, −3, 5) están alineados. En caso negativo, determina la ecuación del único plano que los contiene.

Solución:
Sean A = (1, 2, 3), B = (1, −2, 4) y C = (1, −3, 5).
Como los vectores **AB** = (0, −4, 1) y **AC** = (0, −5, 2) son linealmente independientes (se ve de manera inmediata, pues sus coordenadas no son proporcionales), los puntos no están alineados.

La ecuación del plano que determinan es: $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ y-2 & -4 & -5 \\ z-3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-1=0$