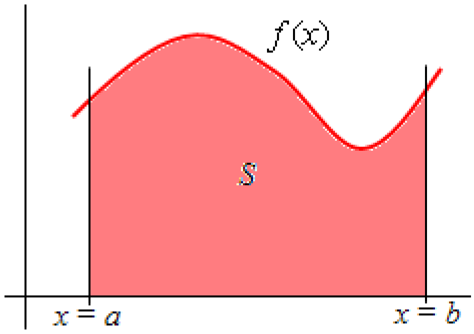
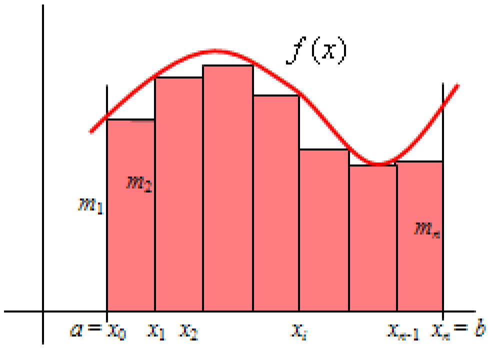
Tema 11. La integral definida

1. Integral definida: área bajo una curva

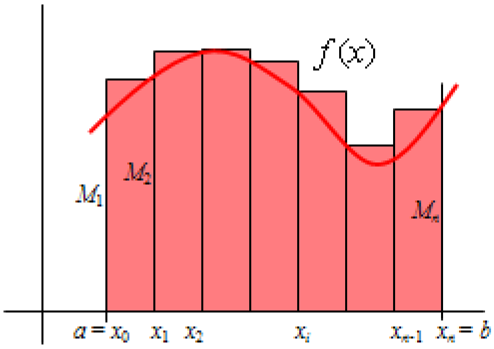
La integral definida permite calcular el área del recinto limitado, en su parte superior por la gráfica de una función $f(x)$, continua y no negativa, en su parte inferior por el eje *OX*, y en los laterales por las rectas $x = a$ y $x = b$. Esto es, el área *S* del recinto coloreado en la figura adjunta.



En la antigüedad esta área se calculaba, de manera aproximada, sumando las superficies de *muchos* rectángulos de base muy pequeña y de altura el mínimo (o el máximo) de la función en cada uno de los subintervalos en los que se divide el intervalo [*a*, *b*], tal y como puede observarse en las siguientes figuras.



La suma de las áreas de los rectángulos “interiores” se llama suma inferior; puede denotarse por s_1. Evidentemente esta suma es menor que la superficie *S*: $s_1 < S$



La suma de las áreas de los rectángulos “exteriores” se llama suma superior; puede denotarse por S_1. Evidentemente esta suma es mayor que la superficie *S*: $S < S_1$

Cuando se divide el intervalo en otros más pequeños se dice que se hace una partición del intervalo. Aquí se divide en *n* intervalos que pueden ser de la misma amplitud, o no. Si se parte por los puntos $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$, las bases de los rectángulos considerados serán:

$$x_1 - x_0,\ \ x_2 - x_1,\ \ldots,\ x_i - x_{i-1},\ \ldots,\ x_n - x_{n-1}$$

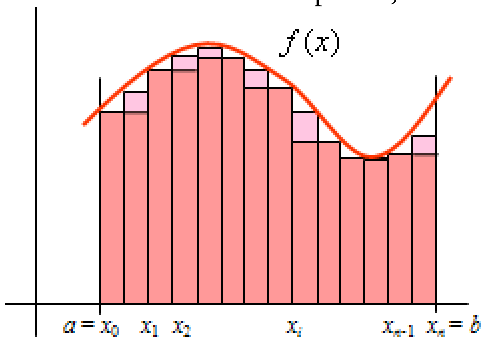
- Si la altura mínima de la función en el intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ es m_i, la suma de las superficies de los rectángulos “interiores” será:

$$\left(x_1 - x_0\right)\cdot m_1 + \left(x_2 - x_1\right)\cdot m_2 + \ldots + \left(x_i - x_{i-1}\right)\cdot m_i + \ldots + \left(x_n - x_{n-1}\right)\cdot m_n = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{i-1}\right)\cdot m_i = s_1$$

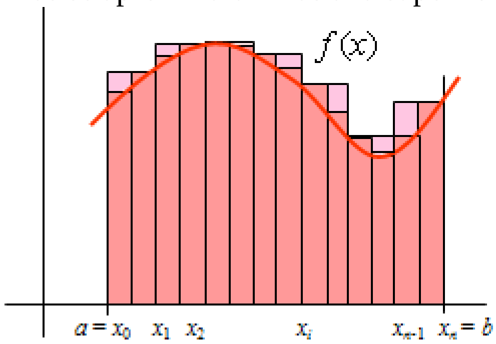
- Si la altura máxima de la función en el intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ es M_i, la suma de las superficies de los rectángulos “exteriores” será:

$$\left(x_1 - x_0\right)\cdot M_1 + \left(x_2 - x_1\right)\cdot M_2 + \ldots + \left(x_i - x_{i-1}\right)\cdot M_i + \ldots + \left(x_n - x_{n-1}\right)\cdot M_n = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{i-1}\right)\cdot M_i = S_1$$

Si se divide el intervalo en más partes, ambas sumas se aproximarán más a la superficie real S.



En la suma inferior se *ganan* los trozos sombreados en color más claro. Si se denota por s_2 a esta suma se cumple que $s_1 < s_2 < S$



En la suma superior se *pierden* los trozos sombreados en color más claro. Si se denota por S_2 a esta suma se cumple que $S < S_2 < S_1$

Si este proceso de subdivisión se repitiese muchas veces, se obtendrían dos sucesiones, $\{s_i\}$ y $\{S_i\}$, una creciente y otra decreciente, que irían encajando la superficie buscada. Esto es:

$$s_1 \le s_2 \le \ \dots \ \le s_i \ \dots \le S \le \dots \ S_i \le \dots \le S_2 \le S_1$$

Se trata, pues, de un proceso de paso al límite. Cumpliéndose que $\lim\limits_{n\to\infty}\{s_i\} = S = \lim\limits_{n\to\infty}\{S_i\}$.

Al valor de este límite se le llama **integral definida de $f(x)$ entre a y b** y se escribe como sigue: $\int_a^b f(x)dx$.

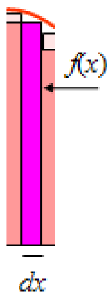
<u>Observaciones</u>:

1. El signo $\int$ es en realidad una ese (S de suma) estirada. Los números a y b son los límites (en el sentido de bordes) de integración. La función $f(x)$ se llama integrando. Así pues, $\int_a^b f(x)dx$ indica que hay que integrar (sumar) $f(x)$ desde el punto a hasta el punto b.

Este proceso de notación puede indicarse como sigue:

$$\sum_{i=0}^{n}(x_i - x_{i-1})\cdot m_i = \sum_{x_1=a}^{x_i=b}(x_i - x_{i-1})\cdot f(x_i) = \sum_{x_1=a}^{x_i=b} f(x_i)\cdot d_i x = \int_a^b f(x)d$$

El símbolo dx se lee diferencial de x, siendo x la variable independiente de la función f. Esta variable puede designarse con cualquier letra, por ejemplo t. Esto es, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

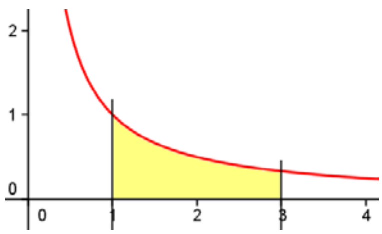


2. La expresión $f(x)\cdot dx$ puede considerarse el área del rectángulo señalado a la derecha, cuya base es dx y su altura, $f(x)$; ambos variables, con dx pequeña.

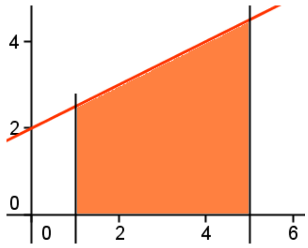
3. La integral así definida suele denominarse de Riemann.

Ejemplo:

La superficie sombreada en la figura adjunta, donde la gráfica es la de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, viene dada por $\int_1^3 \dfrac{1}{x}dx$.



- A continuación se verá cómo puede procederse para calcular un área mediante las sucesivas particiones del intervalo.



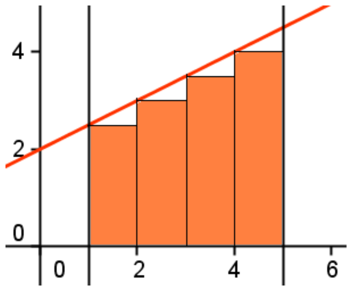
Ejemplo:

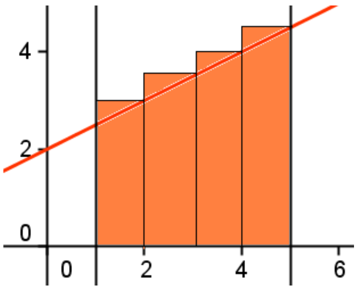
Cálculo del área del recinto plano limitado por $f(x)=\frac{1}{2}x+2$, el eje *OX* y las recta $x = 1$ y $x = 5$.

Se trata de un trapecio de altura 4 y de bases $f(1)=\frac{1}{2}\cdot 1+2=\frac{5}{2}$ y $f(5)=\frac{1}{2}\cdot 5+2=\frac{9}{2}$.

Su área puede hallarse sin ayuda del cálculo integral; vale $S=\dfrac{\left(\frac{5}{2}+\frac{9}{2}\right)\cdot 4}{2}=14\ \text{u}^2$.

Si se aplica el proceso de susbdivisión del intervalo se obtiene.
Primera partición: Se divide el intervalo [1, 5] por los puntos de abscisa 1, 2, 3, 4 y 5.





Por tanto, las bases de los rectángulos valen 1. (El número de rectángulos es 4).

Las alturas inferiores valen: $f(1)=\frac{1}{2}+2=2,5$; $f(2)=3$; $f(3)=3,5$; $f(4)=4$.

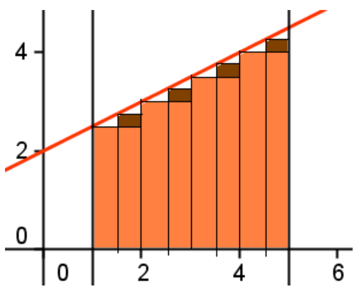
La suma inferior será: $s_1=1\cdot 2,5+1\cdot 3+1\cdot 3,5+1\cdot 4=13$.

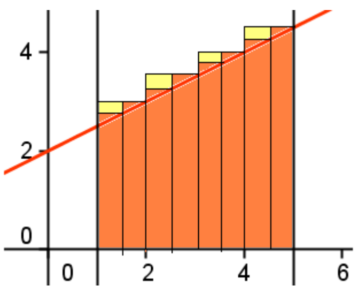
Las alturas superiores valen: $f(2)=3$; $f(3)=3,5$; $f(4)=4$; $f(5)=4,5$.

La suma superior será: $S_1=1\cdot 3+1\cdot 3,5+1\cdot 4+1\cdot 4,5=15$.

Ninguna de esas sumas da el área buscada *S*, pero es evidente que $13 < S < 15$.

Segunda partición: Se divide el intervalo [1, 5] por los puntos de abscisa 1, 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, 4, 4,5 y 5.





En este caso las bases de los rectángulos valen 0,5. (El número de rectángulos es 8).
Las alturas inferiores serán:

$f(1)=2,5$; $f(1,5)=2,75$; $f(2)=3$; $f(2,5)=3,25$;

$f(3)=3,5$; $f(3,5)=3,75$; $f(4)=4$; $f(4,5)=4,25$.

Y las alturas superiores:

$f(1,5)=2,75$; $f(2)=3$; $f(2,5)=3,25$; $f(3)=3,5$;

$f(3,5)=3,75$; $f(4)=4$; $f(4,5)=4,25$; $f(5)=4,5$.

Por tanto, las nuevas sumas valen:

$$s_2=0,5\cdot(2,5+2,75+3+3,25+3,5+3,75+4+4,25)=0,5\cdot\frac{(2,5+4,25)\cdot 8}{2}=13,5$$

$$S_2=0,5\cdot(2,75+3+3,25+3,5+3,75+4+4,25+4,5)=0,5\cdot\frac{(2,75+4,5)\cdot 8}{2}=14,5$$

Ambas sumas se han hecho teniendo en cuenta que se trata de progresiones aritméticas.

<u>Partición genérica</u>:

Si el intervalo [1, 5] se divide en n partes iguales, todas ellas de amplitud $\frac{4}{n}$, por los puntos:

$$1,\ 1+\frac{4}{n},\ 1+2\cdot\frac{4}{n},\ \ldots,\ 1+(n-1)\cdot\frac{4}{n},\ 1+n\cdot\frac{4}{n}=5$$

Las alturas inferiores valdrán:

$$f(1)=2,5;\ f\left(1+\frac{4}{n}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{n}\right)+2=2,5+\frac{1}{2}\frac{4}{n};\ f\left(1+2\frac{4}{n}\right)=2,5+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{n};\ \ldots$$

$$f\left(1+(n-1)\frac{4}{n}\right)=2,5+\frac{1}{2}(n-1)\cdot\frac{4}{n}$$

La suma del área de todos los rectángulos interiores valdrá:

$$s_n=\frac{4}{n}\cdot\left(2,5+\left(2,5+\frac{1}{2}\frac{4}{n}\right)+\left(2,5+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{n}\right)+\ldots+\left(2,5+\frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot\frac{4}{n}\right)\right)\ \to \text{Operando:}$$

$$s_n=\frac{4}{n}\cdot\left(2,5\cdot n+\frac{4}{n}\frac{1}{2}\cdot(1+2+\ldots+(n-1))\right)=10+\frac{8}{n^2}\cdot\frac{(1+n-1)\cdot(n-1)}{2}=10+\frac{4n^2-4n}{n^2}$$

Pasando al límite: $S=\lim\limits_{n\to\infty}\left(10+\frac{4n^2-4n}{n^2}\right)=10+4=14$.

La suma de las áreas de todos los rectángulos exteriores (el lector interesado determinará los detalles) es:

$$S_n=\frac{4}{n}\cdot\left(\left(2,5+\frac{1}{2}\frac{4}{n}\right)+\left(2,5+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{n}\right)+\ldots+\left(2,5+\frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot\frac{4}{n}\right)+\left(2,5+\frac{1}{2}\cdot n\cdot\frac{4}{n}\right)\right)\ \to$$

Operando:

$$S_n=\frac{4}{n}\cdot\left(2,5\cdot n+\frac{4}{n}\frac{1}{2}\cdot(1+2+\ldots+(n-1)+n)\right)=10+\frac{8}{n^2}\cdot\frac{(1+n)\cdot n}{2}=10+\frac{4n^2+4n}{n^2}$$

Pasando al límite: $S=\lim\limits_{n\to\infty}\left(10+\frac{4n^2+4n}{n^2}\right)=10+4=14$.

Puede verse que dos límites tienden a 14.

En definitiva, se tiene que $S=\int_1^5\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx=14$.

<u>Observación</u>: El lector habrá comprobado que este método es lento y puede que complicado. Esta dificultad se subsana aplicando las técnicas de integración que se detallarán más adelante.

2. Propiedades de la integral definida

Existen una serie de propiedades que permiten calcular el valor de la integral definida a partir de la integral indefinida. La más importante recibe el nombre de **teorema fundamental del cálculo integral,** siendo su aplicación más utilizada la llamada **regla de Barrow**.
Otras de esas propiedades son:

1. La integral definida de un número por una función es igual al número por la integral de la función: $k\cdot\int_a^b f(x)dx = \int_a^b k\cdot f(x)dx$.

En particular, si $k = -1$, $\int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx$.

2. La integral definida de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales definidas de cada una de esas funciones:

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

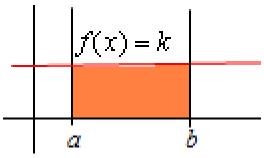
3. El intercambio de los límites de integración cambia el signo de la integral definida:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Por consiguiente, si $b = a$, $\int_a^a f(x)dx = 0$. (El número 0 es el único que es igual a su opuesto).

4. Si k es una constante, $\int_a^b kdx = k(b-a)$.

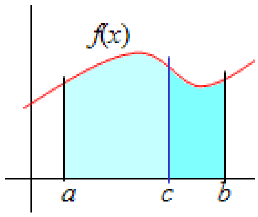
(Es el área de un rectángulo de base $b - a$ y altura k.



5. Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $a < c < b$, se cumple que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

En el caso de $f(x) > 0$ en $[a, b]$, la interpretación de la integral como área permite una compresión inmediata de esta propiedad: el área desde a hasta b es igual al área desde a hasta c más el área desde c hasta b.

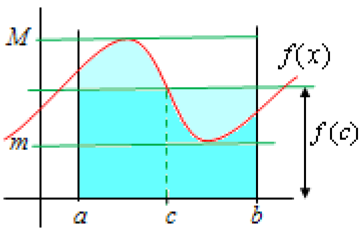


6. Teorema del valor medio del cálculo integral

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, existe un número $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

Esto es, existe un rectángulo de base $b - a$ y altura $f(c)$ que tiene la misma área que la determinada por la integral. A $f(c)$ se le llama valor medio de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.
La demostración de esta propiedad se basa en la consideración de que la "función área" es continua y está comprendida entre

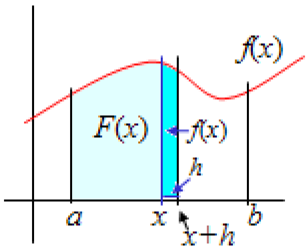


$(b-a)\cdot m$ y $(b-a)\cdot M$, siendo m y M los valores mínimo y máximo de $f(x)$ en el intervalo. Por tanto, "la función área", la integral, toma todos los valores intermedios; luego será igual al área de un rectángulo cuya altura esté entre m y M: $m \le f(c) \le M$.

2.1. Teorema fundamental del cálculo integral

El teorema fundamental del cálculo integral dice:

Si $f(x)$ es una función continua en [a, b] y $F(x)$ se define como $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, entonces $F(x)$ es derivable en [a, b] y su derivada es $F'(x)=f(x)$.



Aclaración: Si se observa la figura adjunta, cuando $f(x)$ es positiva, la función $F(x)$ determina el área por debajo de la curva de $f(x)$ desde a hasta x.

- Un apunte para la demostración de este teorema es lo que sigue.

Aplicando la definición de derivada a la función $F(x)$ se tiene que:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

Como $F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+h} f(t)dt \Rightarrow F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)d\ t$

La última integral corresponde al área del recinto estrecho señalado en la figura. Pero en ese intervalo [x, x + h], al tender h a 0, se tendrá que el mínimo y el máximo de $f(x)$ tienden a ser iguales y a valer lo mismo que $f(x)$. Además, por el teorema del valor medio del cálculo integral: $\int_x^{x+h} f(t)dt=f(c)\cdot h$; pero si $c\to x \Rightarrow f(c)\to f(x)$.

Luego, $F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot h}{h}=f(x)$

Esto significa que la integral definida de una función, $\int_a^b f(x)dx$, puede hallarse encontrando otra función $F(x)$, tal que $f(x)=F'(x)$; esto es, encontrando una primitiva de $f(x)$.
En definitiva, la integral definida y la indefinida están relacionadas.

2.2. Regla de Barrow

Si $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, y conociendo que $F'(x)=f(x)$, cualquier otra primitiva, $G(x)$, de $f(x)$, se diferenciará de $F(x)$ en una constante; esto es, $F(x)-G(x)=c$. O lo que es lo mismo: $F(x)=G(x)+c$; o bien, $F(x)=\int_a^x f(t)dt=G(x)+c$, para todo x de su dominio.

Eligiendo los valores x = a y x = b, se tendrá que:

$$F(a)=\int_a^a f(t)dt=G(a)+c;\quad F(b)=\int_a^b f(t)dt=G(b)+c$$

Como $F(a) = G(a) + c = 0 \Rightarrow c = -G(a)$. Y por tanto, $F(b) = \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$.

Por consiguiente, el valor de la integral definida es

$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$, siendo $G(x)$ cualquier primitiva de $f(x)$.

<u>Resumiendo</u>: Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, esto es $\int f(x)dx = F(x)$, entonces

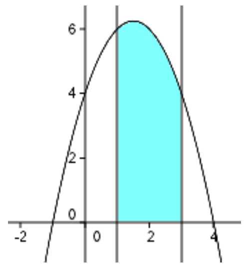
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Esta regla suele escribirse así:

$\int_a^b f(x)dx = \left(F(x)\right)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, siendo $F'(x) = f(x)$.

Ejemplos:

a) La superficie sombreada en la figura adjunta, donde $f(x) = -x^2 + 3x + 4$, viene dada por la integral



$$\int_1^3 \left(-x^2 + 3x + 4\right)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}3^3 + \frac{3}{2}3^2 + 4\cdot 3\right) - \left(-\frac{1}{3}1^3 + \frac{3}{2}1^2 + 4\cdot 1\right) = \frac{33}{2} - \frac{31}{6} = \frac{34}{3}\ \text{u}^2.$$

<u>Nota</u>. La unidad de medida de esta área (u^2) será la correspondiente a cada caso: m^2, dam^2 o la que sea. Si suponemos que la variable *x* viene dada en cm, el resultado de este ejemplo sería 34/3 cm^2.

b) Algunas veces suele pedirse calcular la superficie encerrada entre una curva $y = f(x)$ y el eje *OX*. En estos casos no se dan los extremos *a* y *b* del intervalo, sino que hay que determinarlos. Para ello, basta con resolver la ecuación $f(x) = 0$, pues *a* y *b* son los puntos de corte de la gráfica con el eje *OX*.

Así, si se desea calcular la superficie encerrada entre la curva $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ y el eje *OX*, los límites de integración se obtienen resolviendo la ecuación $-x^2 + 3x + 4 = 0$. (En la figura anterior se observa que esos puntos son –1 y 4).

Por tanto, el área pedida vendrá dada por la integral $\int_{-1}^4 \left(-x^2 + 3x + 4\right)dx$.

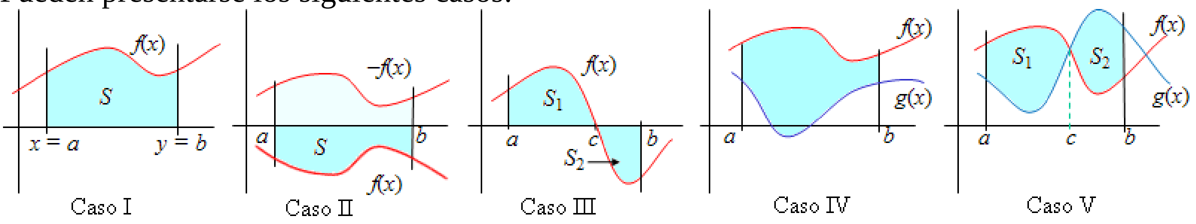
Su valor es: $\int_{-1}^4 \left(-x^2 + 3x + 4\right)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x\right)\Bigg|_{-1}^4 = \frac{56}{3} - \left(-\frac{13}{2}\right) = \frac{125}{6}$ u^2.

c) Conviene saber que la integral definida no siempre está relacionada con un área y que, por tanto, podría plantearse sin más, el cálculo de, por ejemplo: $\int_0^1 \left(2 - e^x\right)dx$.

Su valor es $\int_0^1 \left(2 - e^x\right)dx = \left(2x - e^x\right)\Big|_0^1 = 2 - e - (0 - 1) = 3 - e$.

3. Aplicación de la integral definida al cálculo de áreas de recintos planos

Pueden presentarse los siguientes casos:



Caso I. La función $f(x) \geq 0$ en todo el intervalo de integración.

El área *S* viene dada por: $S = \int_a^b f(x)dx$

El ejemplo a) visto anteriormente sirve de aclaración.

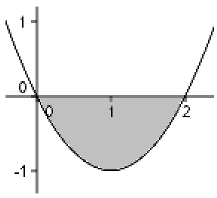
Caso II. La función es negativa en todo el intervalo de cálculo: $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$:

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Es evidente que el recinto por debajo del eje, limitado por $f(x)$ es y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual al recinto superior, limitado por $-f(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Ejemplo:

El área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 2x$ y el eje *OX* viene dada por:



$$S = -\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}.$$

Caso III. La función corta al eje *OX* en el intervalo de integración. El punto *c*, de corte, se obtiene resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

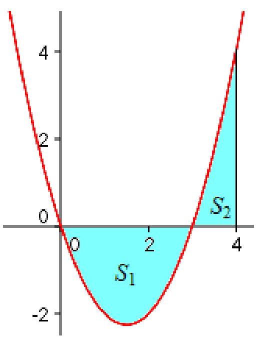
Ejemplos:

a) El área encerrada entre la gráfica de $f(x) = x^2 - 3x$ y el eje *OX*, en el intervalo [0, 4] viene dada por:

$$S = S_1 + S_2 = -\int_0^3 \left(x^2 - 3x\right)dx + \int_3^4 \left(x^2 - 3x\right)dx =$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^3 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_3^4 =$$

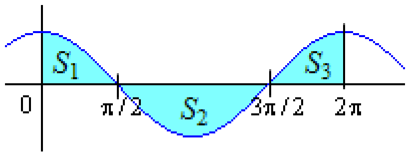
$$= -\left(9 - \frac{27}{2}\right) + \left(\frac{64}{3} - 24\right) - \left(9 - \frac{27}{2}\right) = \frac{19}{3}.$$



Debe observarse que $f(x) = x^2 - 3x$ corta al eje *OX* en la abscisa $x = 3$; que la curva queda por debajo del eje *OX* entre 0 y 3; y por arriba del eje entre 3 y 4. Para ello resulta conveniente hacer una representación gráfica.

b) El área limitada por la gráfica de $f(x) = \cos x$ y el eje OX en el intervalo [0, 2π], viene dada por la suma:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x dx$$



Por la simetría de la curva, el área es

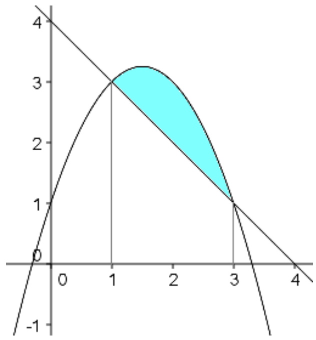
$$S = 4\int_0^{\pi/2} \cos x dx = 4\sin x\Big|_0^{\pi/2} = 4\cdot\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 4$$

<u>Caso IV</u>. Si el recinto viene limitado por dos curvas, con $f(x) \ge g(x)$ para todo $x \in [a, b]$:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

En particular, cuando se pretende hallar el área comprendida entre dos curvas, habrá que determinar las abscisas a y b: se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$.

Ejemplo: El área del recinto acotado, limitado por las gráficas de $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = -x + 4$, que es el representado en la figura adjunta, viene dada por



$$S = \int_1^3 \left(-x^2 + 3x + 1 - (-x + 4)\right)dx = \int_1^3 \left(-x^2 + 4x - 3\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right)\Big|_1^3 = 0 - \left(-\frac{4}{4}\right) = \frac{4}{3}.$$

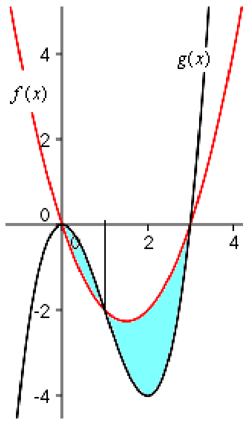
Los límites de integración, 1 y 3, se obtienen resolviendo la ecuación: $-x^2 + 3x + 1 = -x + 4$.

<u>Caso V</u>. Si las curvas se cortan en $c \in [a, b]$:

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$

El punto c se halla resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$.

Ejemplo: El área del recinto acotado, limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 3x$ y $g(x) = x^3 - 3x^2$, que es el sombreado en la figura adjunta, viene dada por



$$S = \int_0^1 \left((x^3 - 3x^2) - (x^2 - 3x)\right)dx + \int_1^3 \left((x^2 - 3x) - (x^3 - 3x^2)\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 - 4x^2 + 3x\right)dx + \int_1^3 \left(-x^3 + 4x^2 - 3x\right)dx =$$

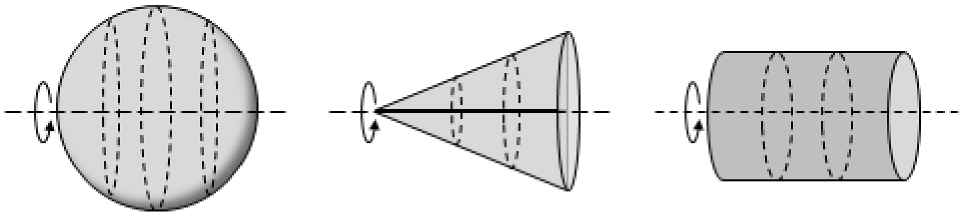
$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + \left(-\frac{81}{4} + 36 - \frac{27}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{12} + \frac{9}{4} - \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{37}{12}$$

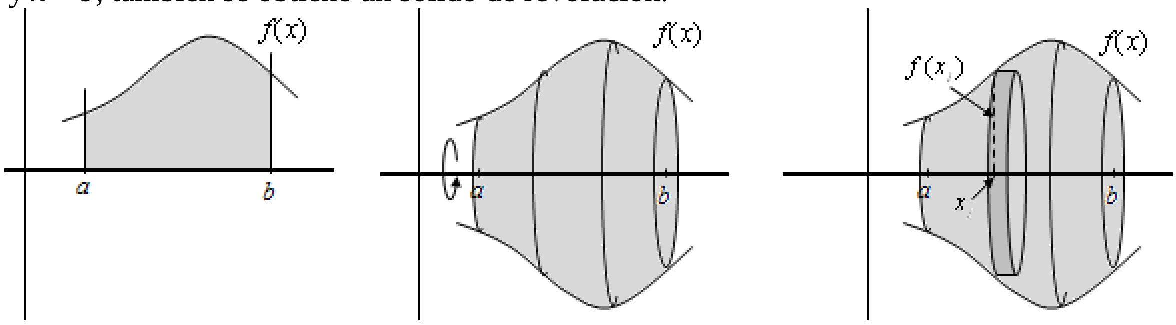
Los puntos de corte de las curvas se hallan resolviendo la ecuación $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$ $x^2 - 3x = x^3 - 3x^2$. Se obtienen: $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$. (Hay que ver qué curva va por encima).

4. Aplicación de la integral definida al cálculo de volúmenes de sólidos de revolución

Cuando un recinto plano gira sobre un eje se obtiene un sólido de revolución. Algunos ejemplos sencillos son: al girar una semicircunferencia sobre su diámetro se obtiene una esfera; al girar un triángulo sobre uno de sus catetos se obtiene un cono; al girar un rectángulo sobre uno de sus lados se obtiene un cilindro.



Igualmente, al girar un recinto plano, limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje *OX* y las rectas *x* = *a* y *x* = *b*, también se obtiene un sólido de revolución.



El volumen de este sólido viene dado por la integral: $V = \int_a^b \pi (f(x))^2\, dx$

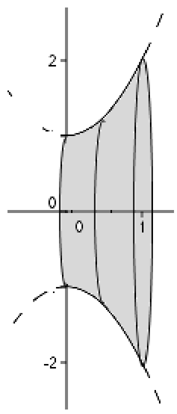
La justificación de este resultado se fundamenta en la siguiente consideración: El volumen de un sólido de revolución puede obtenerse como la suma de los volúmenes de un número cada vez mayor de "rodajas" (cilindros de altura infinitesimal, dx_i, y radio de su base el valor de $f(x_i)$, donde $x_i \in (a, b)$; véase la figura de arriba). Como el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$, el de cada una de esas "rodajas" valdrá $\pi (f(x_i))^2\, dx_i$. Por tanto, y de acuerdo con el concepto de integral definida, el límite de la suma de todos los volúmenes de esos cilindros, cuando $dx_i \to 0$, puede escribirse como $\int_a^b \pi (f(x))^2\, dx$.

Ejemplos:

a) El volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la curva de ecuación $f(x) = x^2 + 1$, alrededor del eje *OX*, en el intervalo [0, 2], viene dado por la integral

$$V = \int_0^1 \pi (x^2+1)^2\, dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx =$$

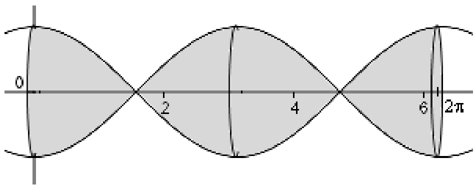
$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \Bigg|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{28\pi}{15} \text{ u}^3.$$



b) El volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la curva de la función $f(x) = \cos x$ alrededor del eje *OX*, entre 0 y 2π, viene dado por la integral:

$$V = \int_0^{2\pi} \pi(\cos x)^2\, dx = \pi\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx =$$

$$= \pi\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \pi\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi^2 \text{ u}^3.$$



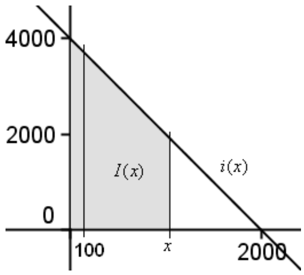
5. Otras aplicaciones de la integral definida

Como es sabido, dada una función “total”, derivándola se obtiene la función marginal. Así, si $C(x)$ es la función de coste total de *x* unidades de un determinado producto, su derivada $C'(x) = \frac{dC(x)}{dx}$ es la función de coste marginal, la tasa de variación instantánea de esa función.
Como la integral es la *operación inversa* de la derivada, se entiende que, partiendo de la expresión que da la función marginal (la tasa de variación de cualquier fenómeno), puede hallarse, integrando, la función total. Siguiendo con el ejemplo anterior, si $C'(x)$ es la función de coste marginal se tendrá que la integral $\int C'(x)dx = C(x) + c$ es la función de coste total. La constante *c* se determinará a partir de alguna condición inicial.

Ejemplo:
a) Si la función del ingreso marginal que tiene una compañía por la venta de un producto es $i(x) = 4000 - 2x$, donde *x* es el número de unidades producidas y vendidas, entonces, la función de ingreso total del producto vendrá dada por

$$I(x) = \int (4000 - 2x)dx = 4000x - x^2 + c$$

Como el ingreso por vender 0 unidades es nulo, se tendrá que $I(0) = c = 0$.
Luego la función pedida será $I(x) = 4000x - x^2$.
El ingreso total es el área (la del trapecio de altura *x*) bajo la curva de ingreso marginal (figura adjunta).



Si vende 100 unidades, el ingreso será $I(100) = 400000 - 10000 = 390000$, que se corresponde con el área del trapecio estrecho.

b) Si el beneficio marginal de un empresario, por la fabricación de un determinado producto, viene dado por la función $b(x) = -x^2 + 120x - 100$, siendo *x* el número de unidades producidas, el beneficio conseguido al aumentar la producción de 30 a 50 unidades viene dado por la integral

$$\int_{30}^{50} (-x^2 + 120x - 100)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 60x^2 - 100x\right)\Bigg|_{30}^{50} = 103333{,}33 - 42000 = 61333{,}33.$$

c) Supóngase que la población de una determinada ciudad crece, desde el momento actual, a un ritmo determinado por la función $p(x) = 50 + 40\sqrt{x}$, donde *x* viene dado en meses. Si la población actual es de 50000 habitantes: ¿cuál será la población dentro de un año?; ¿en cuánto aumentará su población durante el segundo año?

La función que determina la población es:

$$P(x) = \int \left(50 + 40\sqrt{x}\right) dx = \int \left(50 + 40x^{1/2}\right) dx = 50x + \frac{40}{3/2} x^{3/2} + c$$

Como en el momento actual, $x = 0$, $P(0) = c = 50000$, se tendrá que

$$P(x) = 50x + \frac{40}{3/2} x^{3/2} + 50000$$

La población dentro de un año, $x = 12$ meses, será $P(12) = 50 \cdot 12 + \frac{4000}{3/2} \cdot 12^{3/2} + 50000$ = 51708,5 ≈ 51709.

El aumento durante el segundo año, desde $x = 12$ hasta $x = 24$ meses, viene dado por la integral

$$\int_{12}^{24} \left(50 + 40\sqrt{x}\right) dx = \left(50x + \frac{40}{3/2} x^{3/2}\right)\Bigg|_{12}^{24} = 4335{,}35 - 1708{,}51 \approx 2627$$

Nota: La integral definida puede aplicarse para estudiar múltiples procesos económicos. Por ejemplo: problemas relacionados con la distribución de la renta; problemas de valor actual descontado… (Véase “Matemáticas para el análisis económico”, Sydsaeter, 2ª ed, páginas 286 y ss y p. 310 y ss. También puede verse “Métodos fundamentales de economía matemática”, Chiang, p. 468 y ss.)

- En el cálculo de probabilidades, si X es una variable aleatoria que toma valores en el intervalo $[a, b]$, su función de densidad, $f(x) \geq 0$, cumple que $\int_a^b f(x)\, dx = 1$.

La función de distribución de probabilidad, $F(x)$, que mide la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores desde a hasta x, $F(x) = P(a \leq X \leq x)$, es $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Ejemplo:
La variable aleatoria que mide el tiempo de espera en minutos para ser atendido en un *burger* depende de la función de frecuencia de clientes (la función de cuantía o de densidad). Si esta función es $f(x) = \frac{3}{1000} x^2$, con $0 \leq x \leq 10$, se tendrá que:

Su función de distribución de probabilidad será $F(x) = \int_0^x \frac{3}{1000} t^2 dt = \frac{x^3}{1000}$.

La probabilidad de tener que esperar entre 3 y 7 minutos, por ejemplo, viene dada por

$$P(3 \leq X \leq 7) = \int_3^7 \frac{3}{1000} x^2 dx = \frac{x^3}{1000}\Bigg|_3^7 = \frac{343}{1000} - \frac{27}{1000} = \frac{316}{1000} = 0{,}316.$$

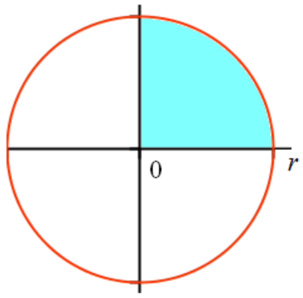
6. Área del círculo y volumen de la esfera

Aplicando el cálculo integral se puede confirmar que la fórmula del área del círculo de radio *r* es $S = \pi r^2$.

Igualmente se puede obtener la fórmula del volumen de la esfera de radio *r*: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

6.1. Área del círculo

Sea la circunferencia centrada en el origen y de radio *r*, cuya ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$.



La superficie del círculo es cuatro veces la del cuarto de círculo situado en el primer cuadrante.

De $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$ es la función que define la semicircunferencia superior.

Luego, el área del circulo vendrá dada por:

$$S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

→Para calcular esta integral hay que hacer dos cambios, ambos de carácter trigonométrico:

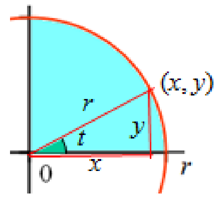
1) $x = r\cos t$; 2) $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$

Haciendo el cambio de variable $x = r\cos t \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x = 0 \Rightarrow t = \pi/2 \\ \text{Si } x = r \Rightarrow t = 0 \\ \sqrt{r^2 - x^2} = r\sin t \\ dx = -r\sin t dt \end{cases}$

Sustituyendo:

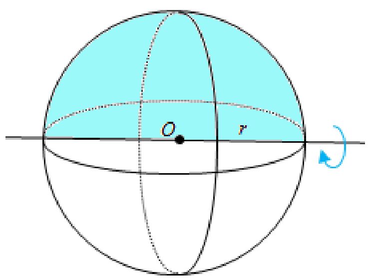
$$S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 4\int_{\pi/2}^{0} (r\sin t)(-r\sin t dt) = -4\int_{\pi/2}^{0} r^2 \sin^2 t\; dt =$$

$$= -4r^2\int_{\pi/2}^{0} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = -4r^2\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{0} = -4r^2\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \pi\, \mathrm{r}^2$$



Observación: El cambio $x = r\cos t$ tiene un sentido geométrico claro, pues los puntos (*x*, *y*) de la circunferencia de radio *r* también pueden darse mediante las ecuaciones $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$, siendo *t* el ángulo que determina el radio correspondiente con el eje *OX*.

6.2. Volumen de la esfera



La esfera se obtiene al girar el semicírculo alrededor del eje *OX*. Por tanto, su volumen viene dado por la integral:

$$V = \pi\int_{-r}^{r} y^2 dx = \pi\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right)dx =$$

$$= \pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r} = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Problemas Propuestos

Integrales definidas

1. Halla el valor de:

a) $\int_{-2}^{3}\left(x^2+2\right)dx$ b) $\int_{0}^{7}\frac{4}{\sqrt{5x+1}}dx$ c) $\int_{0}^{\sqrt{3}}x\sqrt{1+x^2}\,dx$ d) $\int_{0}^{1}xe^{-3x^2+1}dx$

2. Calcula la integral $\int_{1}^{e}\ln(x^2)dx$.

3. Utilizando el cambio de variable $t=\ln x$ calcula $\int_{e}^{e^2}\frac{3}{x(4+\ln x)}dx$.

4. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{0}^{1}\arcsin x\,dx$ b) $\int_{0}^{1}\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx$

5. (Propuesto en Selectividad, Madrid) Calcula razonadamente las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{0}^{\pi}e^{2x}\cos x\,dx$ b) $\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$

Cálculo de áreas de recintos planos

6. Calcula el área de la región limitada por $y=\frac{4}{x}$, el eje *OX* y las rectas $x = 1$, $x = 4$.

7. Halla la superficie del recinto plano encerrado entre la curva dada por la función $f(x)=xe^x$ y el eje *OX*, en el intervalo [–2, 0].

8. Calcula el área encerrada entre la curva de la función $f(x)=\frac{x^2}{2+x}$ y el eje *OX*, en el intervalo [0, 2].

9. Halla el área de la región plana limitada por la curva $y=\sin 2x$ y el eje *OX* en el intervalo [0, π].

10. Halla el área de la región plana limitada por la curva $y=(\sin x)^2\cos x$ y el eje *OX* en el intervalo [0, π/2].

11. Halla el área encerrada entre la curva $y=\frac{1}{x}$ y el eje *OX*, entre $x = 1$ y $x = e^2$.

12. Calcula el área de la región limitada por la función $y = \frac{4}{x}$ y la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (4, 1).

13. Calcula el área comprendida entre las parábolas $y = x^2 + x + 1$, $y = -x^2 - 2x$.

14. Halla el área del recinto plano comprendido entre las gráficas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

15. Calcula el valor de *a* para el que las tangentes a la curva $y = x^2 + a$ en los puntos de abscisa de valor absoluto 1, pasan por el origen de coordenadas. Halla el área del recinto limitado por la curva y las dos tangentes.

16. Calcula el área encerrada entre las curvas dadas por las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$.

17. Calcula el área de la región acotada del plano limitada por la curva $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ y la recta $y = x$.

18. Halla el área del recinto limitado por las curvas de ecuación $y = x^2$ e $y = |x|$.

19. De la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en (0, 0) y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$. Calcula *a*, *b*, *c* y *d*.

20. (Propuesto en Selectividad) Calcula el área determinada por las curvas de ecuaciones $y = 2x^2$ e $y = x^4 - 2x^2$, representadas en el dibujo adjunto.

21. Calcula el área del recinto plano limitado por la parábola $y^2 - x = 1$ y por la recta $y = x - 1$.

22. Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y la cuerda a la misma que une los puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 1$.

23. Halla el área de la región limitada por las curvas $y = \sin x$ e $y = \cos x$ y las rectas $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.

24. Dibuja el recinto finito del plano limitado por la recta $x = 1$, la parábola $y = x^2$ y la hipérbola $y = \frac{8}{x}$. Calcula su área.

25. (Propuesto en Selectividad, Extremadura)
a) Calcula los puntos de corte de la recta $2y - x = 3$ y de la recta $y = 1$ con la rama hiperbólica $xy = 2$, $x > 0$.
b) Dibuja el recinto plano limitado por las tres curvas del apartado anterior.
c) Calcula el área de dicho recinto.

26. Halla el área del recinto limitado por las curvas $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 0$.

27. (Propuesto en Selectividad, Navarra) Dadas las funciones $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = \dfrac{4}{x^2}$, calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

<u>Teorema fundamental del cálculo integral</u>

28. Aplicando el teorema fundamental del cálculo, halla los valores de las constantes *a, b, c* y *d*, sabiendo que:

$$\int_0^x \left(t^3 - t + 1\right)e^t dt = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^x$$

29. (Propuesto en Selectividad)
Halla los puntos donde se anula la derivada de la función $f(x) = -2x + \int_0^{2x} e^{(t^2 - 10t + 24)} dt$.

30. Si f es una función continua en el intervalo [–2, 2] tal que $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = \int_1^2 f(t)dt$, ¿se puede asegurar que existen dos números, b y c pertenecientes a [–2, 2], tales que $b \le -1$, $c \ge 1$ y $f(b) = f(c)$?

31. (Propuesto en Selectividad, Madrid)
Sea la función $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$.
a) Calcula $F'(x)$, estudia el crecimiento de $F(x)$ y halla sus máximos y mínimos.
b) Calcula $F''(x)$ y estudia la concavidad y convexidad de $F(x)$. Esboza la gráfica con los datos obtenidos.

32. (Propuesto en Selectividad, Madrid) Sea f una función real de variable real, continua y positiva, tal que $\int_0^x f(t)dt = e^x + \operatorname{arctg} x + a$.
Determina el valor de la constante *a* y halla $f(x)$ aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo.

33. (Propuesto en Selectividad, La Rioja)
Sea la función $F(x) = \int_1^x \dfrac{\sin t}{t} dt$, definida para $x \ge 1$.
Halla sus máximos y mínimos relativos.

34. (Propuesto en Selectividad, Andalucía)
Sea f una función continua en el intervalo [2, 3] y F una primitiva de f tal que $F(2) = 1$ y $F(3) = 2$, calcula:

a) $\int_2^3 f(x)\,dx$ b) $\int_2^3 (5f(x) - 7)\,dx$ c) $\int_2^3 (F(x))^2 f(x)\,dx$

35. (Propuesto en Selectividad, Madrid)
Sea $f(x)$ una función continua tal que $\int_1^8 f(u)\,du = 3$. Halla $\int_1^2 f(x^3)\,x^2 dx$.

Volúmenes

36. Calcula el volumen del cuerpo generado al girar alrededor del eje OX de la superficie limitada por la curva $y = \sin x$ y el eje OX, entre 0 y π.

37. Halla el volumen generado al girar alrededor del eje OX el recinto plano determinado por dicho eje y la curva $y = x - x^3$.

38. Halla el volumen del cuerpo limitado por la elipse $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$ al dar una vuelta completa alrededor del eje OX.

39. Se consideran, en el plano, las curvas de ecuaciones $y = -\frac{x^2}{4} + x$ e $y = \frac{x^2}{4} - x$. Se pide:
a) El área del recinto finito determinado por dichas curvas.
b) El volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje OX.

Otros problemas

40. Halla el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 \sin x$ y el eje de abscisas entre el origen y el primer punto positivo donde f se anule.

41. (Propuesto en Selectividad) El número de pasajeros que pasan por la terminal de un aeropuerto se ajusta durante un día determinado a la función $P(t) = 432t - t^3$, siendo t el tiempo en horas y $P(t)$ el número de viajeros en el momento t.
a) Representa la gráfica de la función en el contexto del problema. ¿Cuál fue la máxima afluencia del día y en qué momento se da?
b) ¿Qué cantidad de viajeros pasa por esa terminal desde las 0 horas hasta las 18 horas?

42. El tiempo, en horas, que tarda un autobús en hacer el recorrido entre dos ciudades es una variable aleatoria con función de densidad: $f(x) = 0{,}3(3x - x^2)$, si $x \in [1, 3]$; y 0 en otro caso.
a) Calcula el tiempo medio que tarda en hacer el trayecto.
b) Calcula la probabilidad de que la duración del trayecto sea inferior a dos horas.

43. Halla el área limitada por la curva $y = xe^{-x^2}$, el eje de abscisas, y la recta $x = a$, siendo a la abscisa del punto máximo de la curva.

44. Sea $f(x)$ una función derivable en (0, 1) y continua en [0, 1], tal que $f(1) = 0$ y $\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizando la fórmula de integración por partes halla $\int_0^1 f(x)dx$.

45. (Propuesto en Selectividad, Asturias) Se considera la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$.
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa curva en el origen.
b) Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la curva y la recta hallada.
c) Calcula el área de ese recinto.

Soluciones

1. a) $\frac{65}{3}$. b) 8. c) $\frac{7}{3}$. d) $-\frac{1}{6}\left(e^{-2} - e\right)$. **2**. 2. **3**. $3\ln\frac{6}{5}$.

4. a) $\frac{\pi}{2} - 1$. b) $\ln(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2} - 1$. **5**. a) $\frac{1}{5}\left(-2 - 2e^{2x}\right)$. b) ln 2.

6. $4\ln 4$. **7**. $1 - 3e^{-2}$. **8**. $4\ln 2 - 2$. **9**. 2.

10. 1/3. **11**. 2. **12**. $\frac{15}{2} - 4\ln 4$. **13**. $\frac{1}{24}$.

14. 1/3. **15**. 2/3. **16**. 1/2. **17**. 1/2.

18. 1/3. **19**. $f(x) = -x^3 + 3x$. **20**. $\frac{128}{15}$. **21**. $\frac{9}{2}$.

22. $2e^{-1}$. **23**. $2\sqrt{2}$. **24**. $8\ln 2 - \frac{7}{3}$ u^2. **25**. c) $2\ln 2$.

26. $e^2 - 2e + 1$. **27**. 4/3. **28**. $a = 1$; $b = -3$; $c = 5$; $d = -4$.

29. $x = 2$; $x = 3$. **30**. Sí.

31. a) $F'(x) = e^{-x^4} \cdot 2x$; mínimo en $x = 0$. b) P.I. en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

32. $a = -1$; $f(x) = e^x + \frac{1}{1 + x^2}$

33. Máximos: $x = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$; mínimos: $x = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$

34. a) 1. b) –2. c) 7/3.

35. 1. **36**. $\frac{\pi^2}{2}$. **37**. $\frac{16\pi}{105}$ u^3. **38**. $\frac{20}{3}\pi$.

39. a) $\frac{16}{3}$. b) $\frac{32\pi}{15}$ u^3. **40**. $\pi^2 - 4$. **41**. b) 43740.

42. a) 1,8. b) 0,65. **43**. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{e}}$. **44**. –1/2.

45. a) $y = x$. c) 4/3.