Descomposición elemental (ajustes por constantes)

OBSERVACIONES

1. Las primeras integrales que aparecen se han obtenido del libro de Matemáticas I (1º de Bachillerato) McGraw-Hill, Madrid 2007.
2. Otros problemas se han obtenido de las Pruebas de Selectividad.

Algunas integrales con solución.

1. $\int 4x^2dx = \frac{4}{3}x^3 + c$

2. $\int 2x^2dx = \frac{2x^3}{3} + c$

3. $2\int (x^2 - 1)dx = \frac{2x^3}{3} - 2x + c$

4. $\int (-4)dx = -4x + c$

5. $\int (4x^2 - 3x + 4)dx = \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + c$

6. $\int (2x^3 - 5)dx = \frac{x^4}{2} - 5x + c$

7. $\int (-3x^2 + x - 1)dx = -x^3 + \frac{x^2}{2} - x + c$

8. $\int \frac{3x+4}{5}dx = \frac{3}{10}x^2 + \frac{4}{5}x + c$

9. $\int \frac{x^2 - 2x + 1}{3}dx = \frac{x^3}{9} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + c$

10. $\frac{1}{2}\int (x^2 + 2x - 1)dx = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c$

11. $\int 3x(4x^2 - 3x + 4)dx = 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 + c$

12. $\int x^2(3x - 5)dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + c$

13. $\int x(3x - 5)^2dx = \frac{9}{4}x^4 - 10x^3 + \frac{25}{2}x^2 + c$

14. $\int \frac{-1}{x^2}dx = \frac{1}{x} + c$

15. $\int \frac{2}{x^3}dx = -\frac{1}{x^2} + c$

16. $\int \frac{-3}{x^4}dx = \frac{1}{x^3} + c$

17. $\int \frac{4}{x^5}dx = -\frac{1}{x^4} + c$

18. $\int x\sqrt{x}dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + c$

19. $\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = 2x^{1/2} + c$

20. $\int \frac{x}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$

21. $\int \frac{3}{x}dx = 3\ln x + c$

22. $\int \frac{3}{x-1}dx = 3\ln(x-1) + c$

23. $\int \frac{1}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\ln(2x-1) + c$

24. $\int \frac{3}{2x-1}dx = \frac{3}{2}\ln(2x-1) + c$

25. $\int \frac{3x+4}{x}dx = 3x + 4\ln x + c$

26. $\int \frac{x^2 - 2x + 1}{3x}dx = \frac{x^2}{6} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\ln x + c$

27. $\int (3+x)^4dx = \frac{(3+x)^5}{5} + c$

28. $\int (2x^3 - 1)^5 \cdot 6x^2dx = \frac{(2x^3-1)^6}{6} + c$

29. $\int \frac{2x}{x^2+6}dx = \ln(x^2 + 6) + c$

30. $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}dx = sen\sqrt{x} + c$

31. $18\int \frac{1}{3x+1}dx = 6\ln(3x+1) + c$

32. $\int \frac{x}{x^2+6}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 6) + c$

33. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x}dx = \ln(x^2 - 3x) + c$

34. $\int 6e^xdx = 6e^x + c$

35. $\int 6e^{3x}dx = 2e^{3x} + c$

36. $\int 4e^{3x}dx = \frac{4}{3}e^{3x} + c$

37. $\int 4e^{2x+3}dx = 2e^{2x+3} + c$

38. $\int (2e^x - 1)dx = 2e^x - x + c$

39. $\int (2e^{2x} + x)dx = e^{2x} + \frac{x^2}{2} + c$

40. $\int 2(e^{2x} + x)dx = e^{2x} + x^2 + c$

41. $\int \frac{2e^{2x} + x}{3}dx = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{6}x^2 + c$

42. $\int 2\cos x dx = 2 sen x + c$

43. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} sen 2x + c$

44. $\int (-5\cos 3x)dx = -\frac{5}{3} sen 3x + c$

45. $\int \frac{\cos 4x}{3}dx = \frac{1}{12} sen 4x + c$

46. $\int 3 sen 3x dx = -\cos 3x + c$

47. $\int 2 sen 4x dx = -\frac{1}{2}\cos 4x + c$

48. $\int (-2 sen 5x)dx = \frac{2}{5}\cos 5x + c$

49. $\int sen\frac{3}{2}x dx = -\frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}x + c$

50. $\int (2 + 2tag^2 x)dx = 2tagx + c$

53. $\int \frac{-1}{\cos^2 x}dx = -tagx + c$

54 $\int tagx dx = -\ln\cos x + c$

Integrales resueltas

---

1. Calcula $\int \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1}dx$

Solución:
Descomponiendo la expresión del integrando:

$$\frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

Por tanto: $\int \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1}dx = \int \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx = x + 2\sqrt{x+1} + c$

NOTA: La integral $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$ es inmediata, pues $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx = 2\sqrt{x+1} + c$

---

2. De una función $y = f(x)$, $x > -1$, sabemos que tiene por derivada $y' = \frac{a}{1+x}$, donde a es una constante. Determina la función si, además, sabemos que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$.

Solución:
La función $y = f(x)$ es una primitiva $y' = \frac{a}{1+x}$.

Por tanto, $f(x) = \int \frac{a}{1+x}dx = a\ln(1+x) + k$, siendo k una constante.

De $f(0) = 1 \Rightarrow a\ln(1+0) + k = 1 \Rightarrow k = 1$. Luego $f(x) = a\ln(1+x) + 1$

De $f(1) = -1 \Rightarrow -1 = a\ln(1+1)+1 \Rightarrow a\ln 2 = -2 \Rightarrow a = \frac{-2}{\ln 2}$.

La función es $f(x) = -\frac{2}{\ln 2}\cdot\ln(1+x)+1$.

---

3. Calcula una primitiva de la función $f(x) = (x+1)^2 x^{-1/2}$ que se anule en x = 1.

Solución:
El conjunto de todas las primitivas es

$$\int (x+1)^2 x^{-1/2}dx = \int (x^2+2x+1)x^{-1/2}dx = \int (x^{3/2}+2x^{1/2}+x^{-1/2})dx =$$

$$= \frac{x^{5/2}}{5/2}+\frac{2x^{3/2}}{3/2}+\frac{x^{1/2}}{1/2}+c = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+c$$

Como la primitiva buscada se anula en x = 1 $\Rightarrow$ $0 = \frac{2}{5}+\frac{4}{3}+2+c \Rightarrow c = -\frac{56}{15}$

La primitiva es: $F(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}-\frac{56}{15}$.

---

4. Calcula razonadamente la expresión de una función $f(\mathrm{x})$ tal que $f'(x) = xe^{-x^2}$ y que $f(0) = \frac{1}{2}$.

Solución:

$$f(x) = \int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$$

De $f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}e^0+c = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 1$.

Luego, $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2}+1$

---

5. Calcula la integral indefinida: $\int \frac{\mathrm{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$

Solución:

$$\int \frac{\mathrm{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{\mathrm{sen}^2 x\cdot\mathrm{sen}\, x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\cdot\mathrm{sen}\, x}{\sqrt{\cos x}}dx =$$

$$= \int \frac{\mathrm{sen}\, x-\cos^2 x\cdot\mathrm{sen}\, x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int (\mathrm{sen}\, x\cdot(\cos x)^{-1/2}-\mathrm{sen}\, x\cdot(\cos x)^{3/2})dx =$$

$$= -2(\cos x)^{1/2}+\frac{2}{5}(\cos x)^{5/2}+c$$

---

6. Calcula la primitiva de la función $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$ que se anula en el punto de abscisa x = 2.

Solución:

Sea $F(x) = \int x\sqrt{x^2-1}dx$ la primitiva buscada.

$$F(x) = \int x\sqrt{x^2-1}dx = \int x(x^2-1)^{1/2}dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2-1)^{1/2}dx =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-1)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{(x^2-1)^{3/2}}{3} + c = \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3} + c$$

Si se anula para x = 2 $\Rightarrow$ $F(2) = \dfrac{\sqrt{(2^2-1)^3}}{3} + c = 0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{27}}{3} + c = 0 \Rightarrow c = -\sqrt{3}$

Luego, $F(x) = \dfrac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3} - \sqrt{3}$

---

7. Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{5x^2-4}}$:

a) Calcula la integral $\int f(x)dx$.

b) Halla la primitiva F de f que cumple que $F(1) = 1$.

Solución:

a) Ajustando constantes se tiene:

$$\int f(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{5x^2-4}}dx = \frac{2}{10}\int \frac{10x}{2\sqrt{5x^2-4}}dx = \frac{1}{5}\sqrt{5x^2-4} + c$$

b) Como $F(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5x^2-4} + c$, para que $F(1) = 1$ se tendrá:

$$F(1) = \frac{1}{5}\sqrt{5\cdot 1^2-4} + c = 1 \Rightarrow \frac{1}{5} + c = 1 \Rightarrow c = \frac{4}{5}$$

Por tanto, la primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5x^2-4} + \frac{4}{5}$

---

8 . Calcula $\int \dfrac{x^2+1}{x^2-4x+13}dx$.

Solución:

Primera descomposición:

$$\frac{x^2+1}{x^2-4x+13} = \frac{x^2-4x+13+4x-12}{x^2-4x+13} = 1 + \frac{4x-12}{x^2-4x+13}$$

La segunda fracción:

$$\frac{4x-12}{x^2-4x+13} = \frac{2(2x-4)}{x^2-4x+13} - \frac{4}{x^2-4x+13}$$

Y, por último:

$$\frac{4}{x^2-4x+13}=\frac{4}{9+(x-2)^2}=\frac{\frac{4}{9}}{1+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2}=\frac{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2}$$

Por tanto, la integral pedida es:

$$\int\frac{x^2+1}{x^2-4x+13}dx=\int\left(1+2\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+13}-\frac{4}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2}\right)dx=$$

$$= x+2L(x^2-4x+13)-\frac{4}{3}arctag\left(\frac{x-2}{3}\right)+c$$

Cambios de variable

10. Calcula $\int \frac{dx}{(x-1)^2}$

Solución:

Haciendo el cambio de variable x – 1 = t → dx = dt, se tiene:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = -t^{-1} + c \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{-1}{x-1} + c$$

---

11. Calcula $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}} dx$.

Solución:

Puede hacerse el cambio $\sqrt{x} = t$. Con esto, si diferenciamos se tiene:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Rightarrow \quad dx = 2\sqrt{x}dt \Rightarrow dx = 2tdt .$$

Sustituyendo en la integral dada:

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{2}{1+t} \cdot 2tdt = \int \frac{4t}{1+t} dt = \int \left(4 - \frac{4}{1+t} \right) dt = 4t - 4\ln(1+t) + c$$

Deshaciendo el cambio se obtiene:

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}} dx = 4\sqrt{x} - 4\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + c$$

---

12. Calcula $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$

Solución:

Haciendo el cambio de variable $\sqrt{x} = t$ se tiene: $\sqrt{x} = t$; $x = t^2$; $dx = 2tdt$

Por tanto

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1+t^2}{1+t} \cdot 2tdt = \int \frac{2t^3 + 2t}{1+t} dt$$

Haciendo la división del integrando:

$$\int \frac{2t^3+2t}{1+t} dt = \int \left(2t^2 - 2t + 4 - \frac{4}{1+t} \right) dt = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 4t - 4\ln(1+t) + c$$

Deshaciendo el cambio se tendrá que:

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln(1+\sqrt{x}) + c$$

13. Calcula $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$.

Solución:

Haciendo x + 1 = t $\Rightarrow$ $\begin{cases} dx = dt \\ \sqrt{x+1} = \sqrt{t} \\ x^2 = (t-1)^2 \end{cases}$

Luego:

$$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = \int (t^2 - 2t + 1)t^{1/2}dt = \int (t^{5/2} - 2t^{3/2} + t^{1/2})dt =$$

$$= \frac{2}{7}t^{7/2} - \frac{4}{5}t^{5/2} + \frac{2}{3}t^{3/2} + c = \frac{2}{7}(x+1)^{7/2} - \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c$$

---

15. De todas las primitivas de la función $f(x) = 2\tan(x)\sec^2(x)$, halla la que pasa por el punto P(π/4, 1).

Solución:

Como debería saberse, $\sec^2$(x) = 1 + $\tan^2$(x). En consecuencia:

$$\int 2\tan(x)\sec^2(x)dx = \int 2\tan(x)[1 + \tan^2(x)]dx$$

Haciendo el cambio tan(x) = t $\Rightarrow$ [1 + $\tan^2$(x)]dx = dt, luego

$$\int 2\tan(x)[1 + \tan^2(x)]dx = \int 2tdt = t^2 + c = \tan^2(x) + c$$

Para que pase por P(π/4, 1) $\rightarrow$ $\tan^2$(π/4) + c = 1 $\Rightarrow$ 1 + c = 1 $\Rightarrow$ c = 0.

La primitiva buscada es $\int 2\tan(x)\sec^2(x)dx = \tan^2(x)$

Integración por partes

16. Describe en qué consiste el método de integración por partes para el cálculo de primitivas. Aplica dicho método para calcular las siguientes primitivas:

$$I = \int xe^{2x}dx \qquad J = \int x\ln(x)dx$$

Solución:

El método de integración por partes puede usarse para la integración de un producto de funciones. Su regla se obtiene como sigue:

Sean u y v las funciones.

Diferenciando: $d(uv) = udv + vdu$

Integrando: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu \Rightarrow uv = \int udv + \int vdu$

Despejando: $\int udv = uv - \int vdu$

Aplicación a los casos planteados:

$$I = \int xe^{2x}dx$$

Tomando: u = x $\Rightarrow$ du = dx

$$e^{2x}dx = dv \Rightarrow \int e^{2x}dx = \int dv \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Se tiene: $I = \int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$

$$J = \int x\ln(x)dx$$

Tomando: u = x lnx $\Rightarrow$ du = (lnx +1)dx

dv = dx $\Rightarrow$ v = x

Luego, $J = \int x\ln(x)dx = x^2\ln x - \int (x\ln x + x)dx = x^2\ln x - \int x\ln xdx + \int xdx \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\int x\ln xdx = x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + c$$

De donde, $J = \int x\ln(x)dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4} + c$

---

17. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \ln(x+1)dx$$

Solución:

$\int \ln(x+1)dx$ se hace por partes, tomando:

u = ln (x + 1) $\Rightarrow$ $du = \frac{1}{x+1}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

Queda;

$$\int \ln(x+1)dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx \;=\; x\ln(x+1) - \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx \;=$$

$$= \; x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + c$$

---

18. Determina la función $f(x)$ sabiendo que $f''(x) = x\ln x$, $f'(1) = 0$ y $f(e) = \frac{e}{4}$.

Solución:

$$f'(x) = \int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

Esta integral la hemos hecho por partes, tomando: ln x = u; xdx = dv

Como $f'(1) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{4} + c \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{4}$.

Por tanto, $f(x) = \int \frac{x^2}{2}\ln x dx - \int \frac{x^2}{4}dx + \int \frac{1}{4}dx$

Haciendo por partes $\int \frac{x^2}{2}\ln x dx$ $\left(\ln x = u; \quad \frac{x^2}{2}dx = dv\right)$, se tiene:

$$\int \frac{x^2}{2}\ln x dx = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{x^3}{18}$$

Luego, $f(x) = \int \frac{x^2}{2}\ln x dx - \int \frac{x^2}{4}dx + \int \frac{1}{4}dx = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + c'$

Como $f(e) = \frac{e}{4} \;\Rightarrow\; \frac{e^3}{6}\ln e - \frac{e^3}{18} - \frac{e^3}{12} + \frac{e}{4} + c' = \frac{e}{4} \;\Rightarrow\; c' = \frac{-1}{36}e^3$

De donde, $f(x) = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{5}{18}x^3 + \frac{1}{4}x - \frac{e^3}{36}$

---

19. Calcula la siguiente integral indefinida

$$\int e^{ax}(x^2 + bx + c)dx$$

En función de los parámetros *a*, *b* y *c*.

Solución:

La integral pedida $\int e^{ax}(x^2 + bx + c)dx \;=\; \int x^2 e^{ax}dx + \int bxe^{ax}dx + \int ce^{ax}dx$

Las dos primeras integrales deben hacerse por el método de partes; la tercera es inmediata.

La integral $\int ce^{ax}dx = \frac{c}{a}\int ae^{ax}dx = \frac{c}{a}e^{ax} + k$

Para $\int bxe^{ax}dx$ hacemos

$$u = bx \;\Rightarrow\; du = bdx$$

$$dv = e^{ax}dx \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{a}e^{ax}$$

Luego, $\int bxe^{ax}dx = bx\frac{1}{a}e^{ax} - \int \frac{b}{a}e^{ax}dx = \frac{b}{a}xe^{ax} - \frac{b}{a^2}e^{ax}$ (*)

Para $\int x^2 e^{ax}dx$ hacemos

$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$

$dv = e^{ax}dx \Rightarrow v = \frac{1}{a}e^{ax}$

Luego $\int x^2 e^{ax}dx = \frac{x^2}{a}e^{ax} - \int \frac{2x}{a}e^{ax}dx$

La segunda integral es idéntica a (*) para $b = -\frac{2}{a}$. Por tanto

$$\int x^2 e^{ax}dx = \frac{x^2}{a}e^{ax} - \int \frac{2x}{a}e^{ax}dx = \frac{x^2}{a}e^{ax} - \frac{2}{a^2}xe^{ax} + \frac{2}{a^3}e^{ax}$$

Teniendo en cuenta todos los resultados,

$$\int e^{ax}(x^2 + bx + c)dx = \frac{x^2}{a}e^{ax} - \frac{2}{a^2}xe^{ax} + \frac{2}{a^3}e^{ax} + \left(\frac{b}{a}xe^{ax} - \frac{b}{a^2}e^{ax}\right) + \frac{c}{a}e^{ax} + k =$$

$$= \left(\frac{x^2}{a} + \frac{ab-2}{a^2}x + \frac{2-ab+a^2c}{a^3}\right)e^{ax} + k$$

---

20. Sea f: $(0, +\infty) \to \mathbf{R}$ la función definida por $f(x) = x(1-\ln x)$, donde $\ln x$ es logaritmo neperiano de x. Encuentra una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto (1, 1) (3 puntos)

Solución:

$F(x) = \int x(1-\ln x)dx$

Hacemos $\int x\ln x dx$ por partes:

u = x lnx $\Rightarrow$ du = (lnx +1)dx

dv = dx $\Rightarrow$ v = x

Luego, $\int x\ln xdx = x^2\ln x - \int (x\ln x + x)dx \Rightarrow 2\int x\ln xdx = x^2\ln x - \frac{x^2}{2}$

De donde, $\int x\ln xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4}$

Con esto:

$$F(x) = \int x(1-\ln x)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{x^2}{4} + c = \frac{3x^2}{4} - \frac{1}{2}x^2\ln x + c$$

Como el punto (1, 1) es de F(x), se cumple que:

$$1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 1 + c \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

Por tanto, la primitiva pedida es $F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}$

Descomposición en fracciones simples

21. Halla la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{x^2+x-6}$$

Solución:

Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2+x-6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

Luego:

$1=A(x+3)+B(x-2)$

si x = 2: 1 = 5A $\Rightarrow$ A = 1/5

si x = –3: 1 = –5B $\Rightarrow$ B = –1/5

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2+x-6} = \int\left(\frac{1/5}{x-2}-\frac{1/5}{x+3}\right)dx=\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x+3}dx =$$

$$= \frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{1}{5}\ln(x+3)+c$$

---

22. Calcula $\int \frac{2}{x^2-1}dx$

Solución:

Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

Luego:

$2=A(x+1)+B(x-1)$

si x = 1: 2 = 2A $\Rightarrow$ A = 1

si x = –1: 2 = –2B $\Rightarrow$ B = –1

Con esto:

$$\int\frac{2}{x^2-1}dx=\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{1}{x+1}dx=\ln(x-1)-\ln(x+1)+c$$

---

23. Calcula: $\int \frac{1}{1-x^2}dx$

Solución:

(Observa que es casi igual que la anterior.)

Descomponiendo en fracciones simples,

$$\int\frac{1}{1-x^2}dx=\int\frac{1/2}{1-x}dx+\int\frac{1/2}{1+x}dx=-\frac{1}{2}L(1-x)+\frac{1}{2}L(1+x)+c$$

---

24. Calcula:

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 4} dx$$

Solución:

Hacemos la división $(x^3 + x^2 + 1) : (x^2 - 4)$.

Queda: $\frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 4} = x + 1 + \frac{4x+5}{x^2 - 4}$.

Descomponemos en fracciones simples $\frac{4x+5}{x^2-4}$.

$$\frac{4x+5}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{x^2-4} \Rightarrow 4x+5 = A(x+2) + B(x-2)$$

Para x = 2, se tiene: $13 = 4A \Rightarrow A = 13/4$

Para x = –2, se tiene: $-3 = -4B \Rightarrow B = 3/4$

Luego, $\frac{4x+5}{x^2-4} = \frac{13/4}{x-2} + \frac{3/4}{x+2}$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 4} dx = \int \left(x + 1 + \frac{13/4}{x-2} + \frac{3/4}{x+2} \right) dx =$$

$$= \int (x+1) dx + \frac{13}{4} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{3}{4} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{2} x^2 + x + \frac{13}{4} \ln(x-2) + \frac{3}{4} \ln(x+2) + k$$

---

25. Calcula:

$$\int \frac{2dx}{x^3 - x}$$

Solución:

Puede hacerse por el método de descomposición en fracciones simples.

Como las raíces del denominador de la expresión $\frac{2}{x^3 - x}$ son 0, –1 y 1, se tendrá:

$$\frac{2}{x^3 - x} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x^3 - x}$$

Por tanto: $2 = A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$

Si damos los valores 0, 1 y –1 se tendrá:

Para x = 0 $\Rightarrow$ 2 = –A $\Rightarrow$ A = –2

Para x = 1 $\Rightarrow$ 2 = 2B $\Rightarrow$ B = 1

Para x = –1 $\Rightarrow$ 2 = 2C $\Rightarrow$ C = 1

Luego

$$\int \frac{2}{x^3 - x} dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) dx = -2 \ln x + \ln(x-1) + \ln(x+1) + c$$

---

26. Se consideran las funciones reales $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5$ y $g(x) = 6x^2 - 7x + 2$. Se pide:

a) Determina las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

b) Calcula la función $H(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ que cumple $H(1) = 1$.

Solución:

a) La función $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2}$:

tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es uno más el grado del denominador; puede tener asíntotas verticales en los ceros del denominador; en las soluciones de $6x^2 - 7x + 2 = 0$, que son x = 1/2 y x = 2/3.

Las asíntotas verticales se confirman, pues

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \infty \ \text{y} \ \lim_{x\to 2/3} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \infty$$

La asíntota oblicua puede calcularse dividiendo:

$$\begin{array}{rrrr|lll}
12x^3 & -8x^2 & 9x & -5 & 6x^2 & -7x & 2 \\ \cline{5-7}
-12x^3 & +14x^2 & -4x & & 2x & +1 & \\ \cline{1-3}
 & 6x^2 & 5x & -5 & & & \\
 & -6x^2 & +7x & -2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 12x & -7 & & &
\end{array}$$

La asíntota es la recta y = 2x + 1.

b) Por la división anterior, sabemos que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 2x + 1 + \dfrac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2}$.

Si tenemos en cuenta que $\left(6x^2 - 7x + 2\right)' = 12x - 7$,

$$H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int \left(2x + 1 + \frac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2}\right)dx = x^2 + x + \ln\left(6x^2 - 7x + 2\right) + c$$

Si $H(1) = 1 \Rightarrow 1 + 1 + \ln 1 + c = 1 \Rightarrow c = -1$.

Por tanto, $H(x) = x^2 + x + \ln\left(6x^2 - 7x + 2\right) - 1$

---

27. Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^3}dx$

Solución:

Por descomposición en fracciones simples se tiene:

$$\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} = \frac{A(x+1)^2 + B(x+1) + C}{(x+1)^3}$$

Por tanto,

$$x = A(x+1)^2 + B(x+1) + C = Ax^2 + (2A+B)x + (A+B+C)$$

Identificando coeficientes se tiene el sistema,

$$\begin{cases} A = 0 \\ 2A + B = 1 \\ A + B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 0,\ B = 1,\ C = -1$$

Luego $\dfrac{x}{(x+1)^3} = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{(x+1)^3}$, de donde

$$\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx = \int \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + c$$

Las dos últimas integrales son inmediatas, pues $\int f'(x)\left(f(x)\right)^n dx = \dfrac{\left(f(x)\right)^{n+1}}{n+1}$. Ahora basta con escribir $\int \dfrac{1}{(x+1)^2}\,dx - \int \dfrac{1}{(x+1)^3}\,dx = \int (x+1)^{-2}\,dx - \int (x+1)^{-3}\,dx$