REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Para representar una función $f(x)$, puede seguirse el esquema siguiente:

1. Determinar el **dominio** de definición y el **recorrido** de $f(x)$. (Estudio de posibles discontinuidades. **Regiones**.)

2. **Simetrías**. Hay dos tipos de simetrías.
- Función par: $f(x)$ es simétrica respecto del eje OY. Se cumple que $f(-x) = f(x)$.
- Función impar: $f(x)$ es simétrica respecto del origen: Se cumple que $f(-x) = -f(x)$

3. **Periodicidad**. $f(x)$ es periódica de período *p* si $f(x+p) = f(x)$
En la práctica sólo se tiene en cuenta en las funciones trigonométricas.

4. **Asíntotas**. Puede haberlas verticales, horizontales y oblicuas
- Verticales. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow$ la recta $x = a$ es asíntota vertical $f(x)$
- Horizontales. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Rightarrow$ la recta $y = b$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.
- Oblicuas. Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ $(m \neq 0$ y $m \neq \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} (f(x). - mx) = n$ $(n \neq \infty) \Rightarrow$
  la recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la curva $y = f(x)$.

Es muy útil determinar, mediante el cálculo de límites laterales, la posición de la curva respecto de las asíntotas.

5. **Puntos singulares e intervalos de variación y curvatura**.
- Con la derivada primera, $f'(x)$: Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
- Con la derivada segunda, $f''(x)$: Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

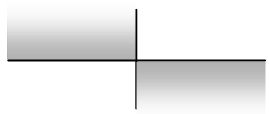
6. **Determinar algunos puntos significativos de la curva $y = f(x)$.**
Puntos máximos, mínimos y de inflexión. Puntos de corte de la curva con los ejes.

7. **Trazado de la curva**.
Todas *las piezas deben encajar*; en caso contrario habrá que revisar los cálculos hechos.

Ejemplos:

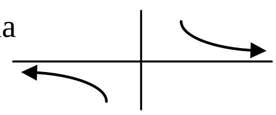
- Para la función $f(x) = \frac{6x}{1+x^2}$ se tiene:

– Dominio = **R**.
– Regiones (signo): por debajo del eje OX (negativa) si x < 0;
por encima de OX si x > 0.

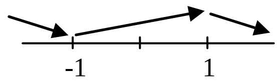


– Simetrías. Es impar: $f(-x) = \frac{6(-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{6x}{1+x^2} = -f(x)$

– Asíntotas. Como $\lim_{x\to\infty} \frac{6x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow$ y = 0 es una asíntota horizontal.
La curva va por debajo de la asíntota cuando x → –∞; va por encima de la asíntota si x → +∞.



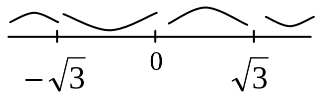
– Derivada primera: $f'(x)=\dfrac{6(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ $\Rightarrow$ se anula en x = –1 y en x = 1.



- Si x < –1, f'(x) < 0 $\Rightarrow$ *f*(x) es decreciente.
- Si –1 < x < 1, f'(x) > 0 $\Rightarrow$ *f*(x) es creciente.
- Si x > 1, f'(x) < 0 $\Rightarrow$ *f*(x) es decreciente.

En x = –1 hay mínimo; en x = 1 hay máximo.

– Derivada segunda: $f''(x)=\dfrac{12x(x^2-3))}{(1+x^2)^3}$ $\Rightarrow$ se anula en x = 0 y en $x=\pm\sqrt{3}$

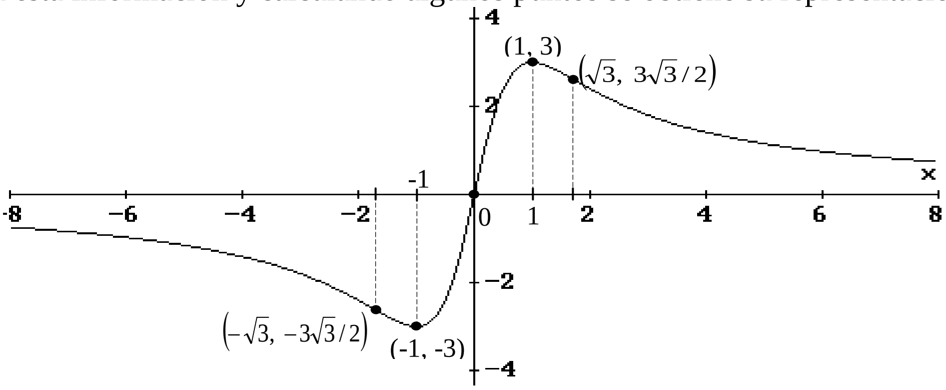


- Si $x<-\sqrt{3}$, f''(x) < 0 $\Rightarrow$ *f*(x) es convexa ($\cap$).
- Si $-\sqrt{3}<x<0$, f''(x) > 0 $\Rightarrow$ *f*(x) es cóncava ($\cup$).
- Si $0<x<\sqrt{3}$, f''(x) < 0 $\Rightarrow$ *f*(x) es convexa ($\cap$).
- Si $x>\sqrt{3}$, f''(x) > 0 $\Rightarrow$ *f*(x) es cóncava ($\cup$).

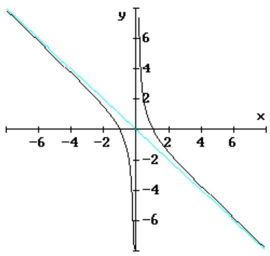
En los puntos $x=-\sqrt{3}$, x = 0 y $x=\sqrt{3}$, la función cambia de curvatura: son puntos de inflexión.

También puede verse que $f''(-1) > 0$ y que $f''(1) < 0$, lo que confirma que en x = –1 haya un mínimo y en x = 1 un máximo.

Con toda esta información y calculando algunos puntos se obtiene su representación gráfica.



- La función $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$ verifica:



– Dominio = **R** – {0}. Es impar: *f*(–x) = –*f*(x)

– En x = 0 tiene una asíntota vertical.

– Como $f(x)=\dfrac{1}{x}-x$, la recta *y* = *x* es una asíntota oblicua.

También puede verse que:

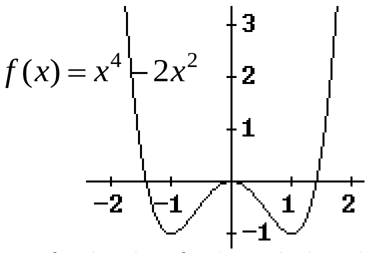
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x^2}=-1=m \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0=n$$

Derivadas: – $f'(x)=\dfrac{-1-x^2}{x^2}<0$ para todo x de su dominio $\Rightarrow$ decrece siempre.

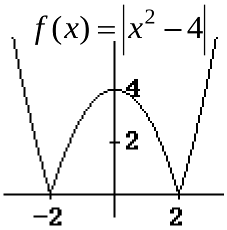
– $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$ $\Rightarrow f''<0$ si x < 0: convexa ($\cap$); $f''>0$ si x > 0: cóncava ($\cup$).

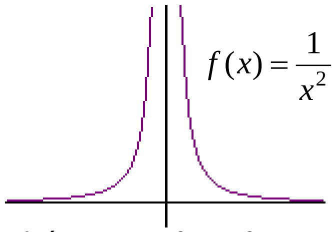
Representación gráfica de algunas curvas

Algunas de las gráficas siguientes se presentan con cierta frecuencia. En cada caso se indican algunos de sus elementos característicos. El lector sabrá completar el resto.

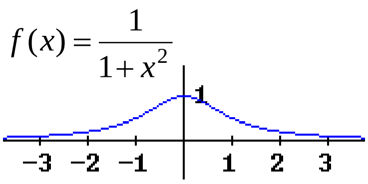


Máx: (0, 0); mín: (-1, -1), (1, -1)
PI: $x = -1/\sqrt{3},\ x = 1/\sqrt{3}$

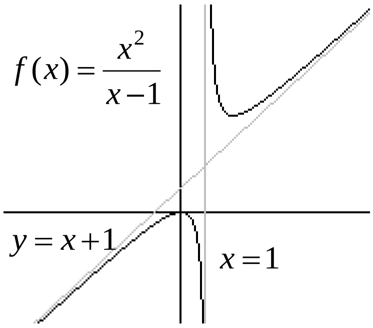


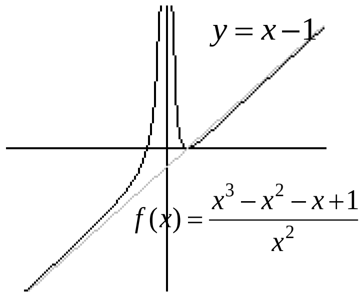


Asíntotas: x = 0; y = 0

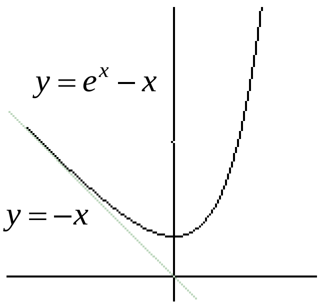


Asíntota: y = 0

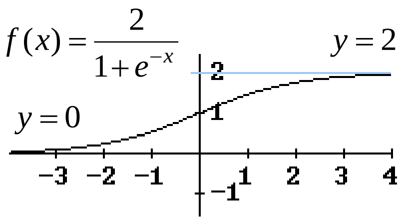




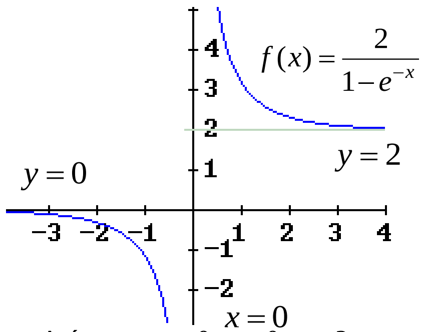
mín: (1, 0). PI: x = 3



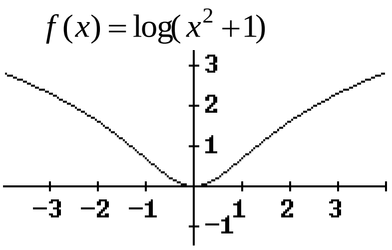
mín: (0, 1).



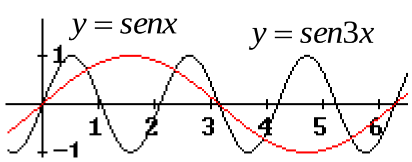
PI: x = 0
Asíntotas: y = 0; y = 2



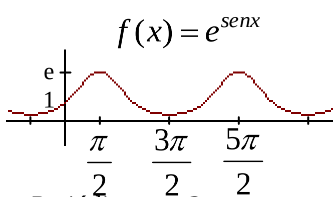
Asíntotas: x = 0; y = 0; y = 2



min: (1, 0). P.I.: x = -1, x = 1



sen 3x, Periódica: p = 2π/3



Periódica: p = 2π