1. Calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$$

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} = \left(\frac{0}{0}=?\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-3\,sen\,3x}{\cos 3x}}{\frac{-2\,sen\,2x}{\cos 2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-3\,tg\,3x}{-2\,tg\,2x} = \left(\frac{0}{0}=?\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3.3.\left(1+tg^2\,3x\right)}{2.2\left(1+tg^2\,2x\right)} = \frac{9}{4}$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x} = \left(\frac{0}{0}=?\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}}-\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}}{4} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{8}$$

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}$

a) Encontrar los puntos de discontinuidad de f. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.
b) Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical.

a) Las discontinuidades estarán en los valores de x que anulen el denominador:

$1 - x^6 = 0$, $x^6 = 1$, $x = 1$ ó $x = -1$

En esos dos valores f no es continua pues no existe ni f (-1) ni f (1). Para cualquier otro valor de x , f sí será continua pues es una función racional (cociente de polinomios).

Para ver si son evitables hay que calcular los límites cuando $x \to -1$ y cuando $x \to 1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-x^8}{1-x^6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x^5\left(1-x^3\right)}{\left(1+x^3\right)\left(1-x^3\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^5}{\left(1+x^3\right)} = \frac{1}{2}$$

Este límite se podría también haber resuelto mediante la regla de l'Hôpital. Al obtener un valor concreto (un número) la discontinuidad que hay en $x = 1$ es evitable; bastaría asignar a la función f el valor $f(x = 1) = ½$.

Veamos ahora qué sucede en $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left(\frac{-2}{0} \right) = \infty$$

Por tanto en $x = -1$ la discontinuidad es inevitable y la gráfica va a tener una asíntota vertical. Puede completarse viendo que los límites laterales van a ser de diferente signo (aunque esto no es estrictamente necesario, en todo caso en el apartado b).

b) Hay una asíntota vertical en $x = -1$, pero no la hay en $x = 1$.

3. a) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$.

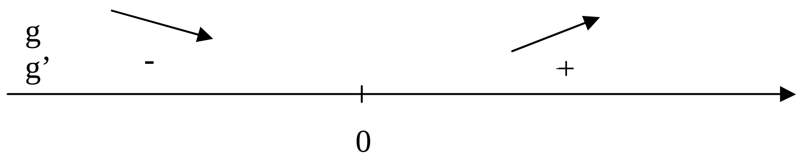
b) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para

$x \to \infty$ y $x \to -\infty$.

c) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de f(x) en su dominio de definición.

a) Hay que representar $y = g(x)$ pero hay que hacerlo tan rápido como se pueda. En estos casos lo más práctico es calcular la primera derivada y las asíntotas, que son las informaciones más representativas.

El dominio de g es todo R (no puede haber asíntotas verticales).
$g'(x) = e^x - 1$; $g'(x) = 0$, $e^x - 1 = 0$, $e^x = 1$, $x = 0$



Hay un mínimo en (0 , 1).

En este caso, la segunda derivada resulta muy sencilla: $g''(x) = e^x$, $g''(x)$ es siempre positiva y la gráfica de $g(x)$ tiene que ser siempre cóncava vista desde arriba.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\left(e^x - x\right) = \infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x - x\right) = \left(0+\infty\right) = \infty$$

Por tanto no hay asíntotas horizontales.

Oblicuas:

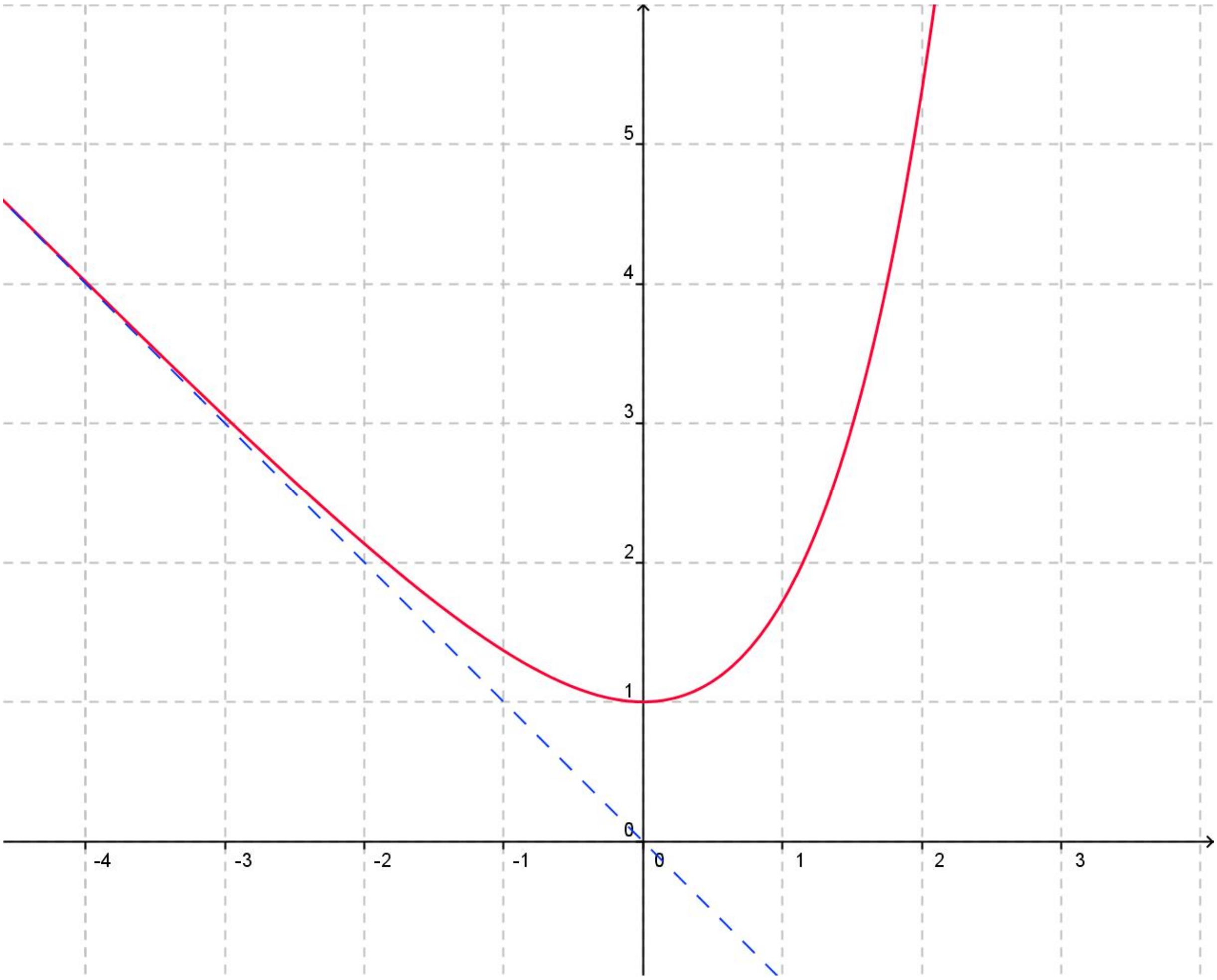
$m = \lim_{x\to\infty} g'(x) = \lim_{x\to\infty}\left(e^x - 1\right) = \infty$ hay una rama parabólica vertical por $+\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} g'(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x - 1\right) = -1$$

hay una asíntota oblicua (de pendiente m = - 1) por - ∞.

$$n = \lim_{x\to-\infty}\left[g(x) - mx\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[e^x - x - (-1)x\right] = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Así que dibujamos rápidamente la recta y = - x y la gráfica de g(x):

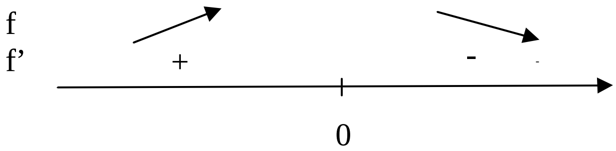


b) Dominio de f(x) = 1 / g(x). Como g(x) > 0 siempre, pues resulta que el denominador de f(x) nunca va a valer 0. El dominio de f(x) es todo R.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x - x} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0^+$$ asíntota horizontal (y = 0, eje OX).

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x - x} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0^+$$ (también OX es asíntota horizontal por - ∞)

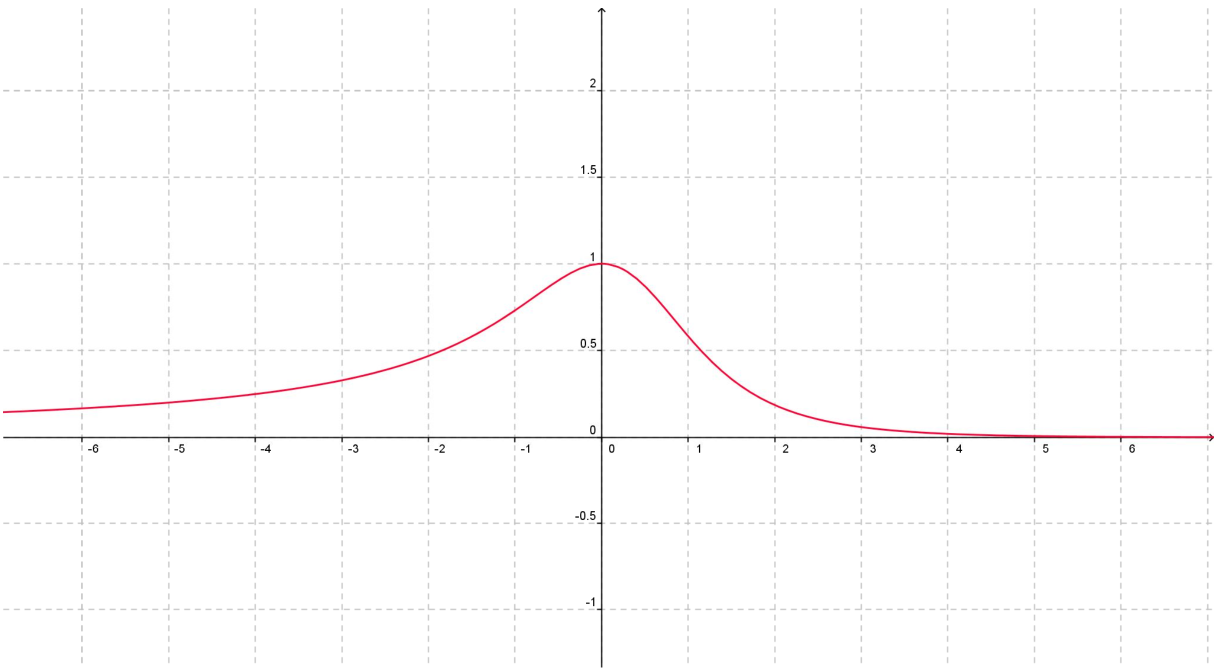
c) $$f'(x) = \frac{-e^x + 1}{\left(e^x - x\right)^2}$$ f'(x) = 0 , $e^x = 1$, x = 0



El máximo absoluto (y relativo) de f(x) se alcanza en x = 0 (y = 1).

No existe mínimo absoluto de f(x) porque f(x) > 0 siempre y tiene como asíntota horizontal al eje OX (y = 0); es decir, no hay ningún valor de la x para el cual se obtenga y = 0, así que no se llega nunca a alcanzar ese valor mínimo.

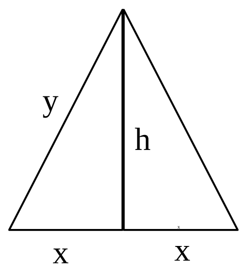
La gráfica de f(x) es:



Derivadas Modelo examen 2

1. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Llamamos x = la mitad de la base, h = la altura , y = cualquiera de los dos lados iguales.



perímetro = 2 x + 2 y = 8 , x + y = 4 , y = 4 – x

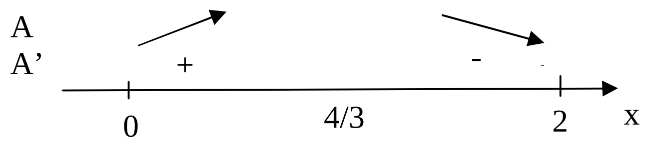
$$h = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{(4-x)^2 - x^2} = \sqrt{16-8x}$$

Área A = ½ . 2 x . h = x . h = $x \, . \sqrt{16-8x}$

$$A' = \sqrt{16-8x} + \frac{-8}{2\sqrt{16-8x}} \cdot x = \sqrt{16-8x} - \frac{4x}{\sqrt{16-8x}}$$

$$A' = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{16-8x} = \frac{4x}{\sqrt{16-8x}} \;\rightarrow\; 16-8x = 4x \;\rightarrow 16 = 12x \;\rightarrow\; x = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Los valores que puede tomar la x están limitados por el contexto del problema: x ha de ser una longitud, así que x > 0 y para que el perímetro pueda ser 8 el máximo valor posible de x es 2 (saldría un triángulo plano).



Se confirma que la máxima área se obtiene para x = 4/3.

La base del triángulo medirá 2 x = 8/3 y la altura será $h = \sqrt{16 - \frac{32}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}31$

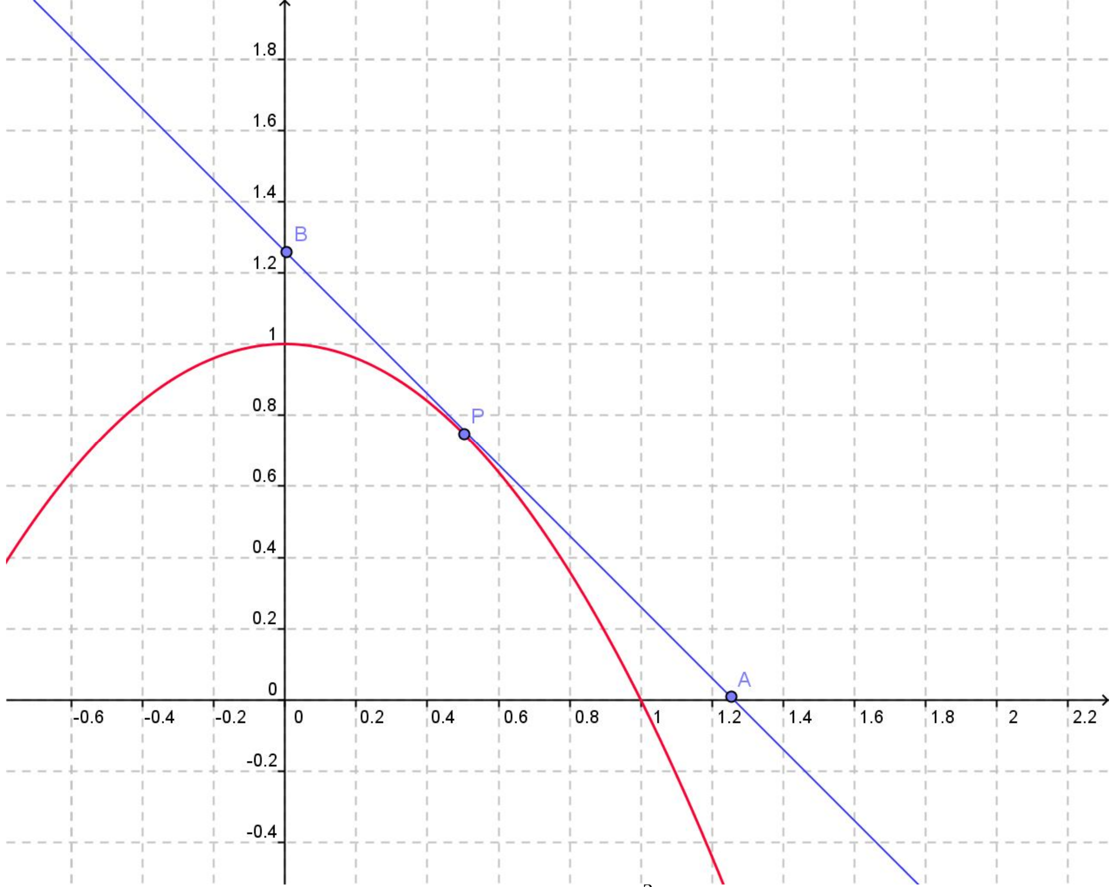
2. Dada la función f(x) = 1 – x^2, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P [a , f(a)], donde 0<a<1.

b) Hallar los puntos A y B de corte de esa recta con los ejes OX , OY respectivamente.

c) Determinar el valor de a (0<a<1) para el cual la distancia PB es el doble que la distancia PA.

Antes de nada: gráfica de la función f y situación de los puntos P , A y B.



a) Punto de tangencia P [a , f(a)] = P (a , 1 – a ^{2})

Pendiente de la recta tangente (t): m = f’ (x = a) = [f’(x) = - 2 x] = - 2 a

Ecuación de t: y – (1 – a ^{2}) = - 2 a (x – a) , y = 1 – a ^{2} – 2ax + 2 a ^{2} = - 2 a x + 1 + a ^{2}

b) A = corte de t con OX (y = 0) , - 2 a x + 1 + a ^{2} = 0 , $x = \dfrac{1+a^2}{2a} \rightarrow A\left(\dfrac{1+a^2}{2a},0\right)$

B = corte de t con OY (x = 0) , B (0 , 1 + a ^{2})

c) $$d(P,A) = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{1+a^2}{2a} - a\right)^2 + (1-a^2)^2} = \sqrt{\left(\frac{1+a^2-2a^2}{2a}\right)^2 + (1-a^2)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^2 + (1-a^2)^2} = \sqrt{(1-a^2)^2\left(\frac{1}{4a^2}+1\right)} = (1-a^2)\sqrt{\frac{1+4a^2}{4a^2}} = \frac{(1-a^2)}{2a}\sqrt{1+4a^2}$$

$$d(P,B) = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_B - y_P)^2} = \sqrt{a^2 + \left[1+a^2-(1-a^2)\right]^2} = \sqrt{a^2 + (2a^2)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2+4a^4} = \sqrt{a^2(1+4a^2)} = a\sqrt{(1+4a^2)}$$

d (P , B) = 2 d (P, A) $\rightarrow$ $a = 2\,\dfrac{1-a^2}{2a} \rightarrow a^2 = 1-a^2 \rightarrow 2a^2 = 1 \rightarrow a^2 = \dfrac{1}{2} \rightarrow a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

3. Calcular a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} a x^2 + b & si\ |x| < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & si\ |x| \geq 1 \end{cases}$

sea continua y derivable en todo R.

Para esos valores aplicar el teorema del Valor Medio a f en el intervalo [-2,1]

Si $|x|<1$ la fórmula que define la función es polinómica (continua y derivable). La otra fórmula podría tener un problema en x = 0, pero ese valor no está en su campo de definición. Así que los únicos puntos conflictivos son x = ±1.
Pero f es una función par, simétrica respecto al eje OY, por lo que es suficiente hacer el estudio para x = 1.

Para que f sea continua en x = 1: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (ax^2 + b) = a + b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^2} = 1 \end{cases}$

Es preciso que a + b = 1.

La expresión de f' resulta ser: $f' = \begin{cases} 2ax & si\ |x| < 1 \\ \dfrac{-2}{x^3} & si\ |x| \geq 1 \end{cases}$

Para que f sea derivable en x = 1: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2ax = 2a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-2}{x^3} = -2 \end{cases}$

2 a = -2 , a = - 1

Y para que a + b = 1 , b = 2

Para aplicar el teorema del Valor Medio, calculamos las coordenadas de los puntos inicial y final del intervalo: A(-2,1/4) y B(1,1).

m = pendiente de la recta AB = $\dfrac{3/4}{3} = \dfrac{1}{4}$ y hay que resolver f'(x) = 1/4

$$f' = \begin{cases} -2x & si\ |x| < 1 \\ \dfrac{-2}{x^3} & si\ |x| \geq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{-2}{x^3} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{8} \\ -8 = x^3 \rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$$

x_1 es una solución correcta porque está en su campo de definición ($|x|<1$) y dentro del intervalo (-2,1) dado en el enunciado. En cambio la segunda posibilidad x_2 está fuera del intervalo (-2,1) por lo que no se puede considerar solución correcta.