

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen consta de dos opciones, A y B.

El alumno deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 2 puntos.

Obtener el valor de a para que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = 4$.

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 2 puntos.

Sea la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2 + 4}}$.

a) (1 punto). Calcula la integral $\int_0^2 f(x) dx$.

b) (1 punto). Halla la primitiva F de f que cumple $F(1) = 1$.

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$, se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar y obtener las asíntotas.

b) (1 punto). Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.

c) (0,5 puntos). Representar gráficamente la función.

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) (1 punto). ¿Es continua en el punto $x = 0$?

b) (1 punto). ¿Es derivable en el punto $x = 0$?

c) (1 punto). ¿Alcanza algún extremo?

OPCIÓN B

Ejercicio 1. - Calificación máxima: 3 puntos.

Un estudio indica que, entre las 12:00 horas y las 19:00 horas de un día laborable típico, la velocidad (en km/h) de tráfico en cierta salida de una autovía viene dada por la siguiente función:

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 20, \quad 0 \leq x \leq 7$$

donde x es el número de horas después del mediodía ($x = 0$ corresponde a las 12:00 horas).

Representar gráficamente $f(x)$, para $0 \leq x \leq 7$, estudiando: los puntos de corte con el eje OY, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad. Calcular las horas en las que se presentan máximos, mínimos y puntos de inflexión para la velocidad del tráfico.

Ejercicio 2. - Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} & \text{si } x \geq -1 \\ \frac{2x}{x-1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (0,5 puntos). Estudiar el dominio y la continuidad de f .
- b) (1,5 puntos). Hallar las asíntotas de la gráfica de f .
- c) (1 punto). Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Ejercicio 3. - Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular los límites:

- a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{a/x}$.
- b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x}$.

Ejercicio 4. - Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular:

- a) (1 punto). $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$.
- b) (1 punto). $\int_0^\pi x \cdot \cos x dx$.

SOLUCIONES

OPCIÓN A,

Ejercicio A.1

Obtener el valor de a para que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = 4$.

Se trata de una indeterminación del tipo $(1)^\infty$ y lo vamos a resolver aplicando la propiedad de los límites del número e :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} \stackrel{(1)^\infty}{=} 4 \Rightarrow e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} - 1 \right) \cdot ax^2} = 4 \Rightarrow e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3 - x^2 - 3}{x^2 + 3} \right) \cdot ax^2} = 4 \Rightarrow e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-6ax^2}{x^2 + 3} \right)} = 4 \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow e^{-6a} = 4 \Rightarrow \ln e^{-6a} = \ln 4 \Rightarrow -6a = \ln 4 \Rightarrow a = -\frac{\ln 4}{6} \approx -0,23.$$

Ejercicio A.2

Sea la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2 + 4}}$.

a) (1 punto). Calcula la integral $\int_0^2 f(x) dx$.

b) (1 punto). Halla la primitiva F de f que cumple $F(1) = 1$.

a) Con unas pequeñas transformaciones vamos a conseguir una función potencia multiplicada, casi, por la derivada de su base:

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{5x^2 + 4}} dx = \int_0^2 x \cdot (5x^2 + 4)^{-1/2} dx = \frac{1}{10} \cdot \int_0^2 \underbrace{10x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(5x^2 + 4)^{-1/2}}_{[f(x)]^n} dx = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \left[\frac{(5x^2 + 4)^{1/2}}{1/2} \right]_0^2 = \frac{1}{10} \cdot \left[2 \cdot \sqrt{5x^2 + 4} \right]_0^2 = \frac{1}{5} \cdot \left[(\sqrt{16}) - (\sqrt{4}) \right] = \frac{1}{5} \cdot (4 - 2) = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

b) Utilizando los cálculos del apartado anterior, tenemos:

$$F(x) = \int f(x) dx = \frac{1}{5} \cdot \left[\sqrt{5x^2 + 4} \right] + k$$

Sólo queda imponer la condición de este apartado:

$$F(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot \left[\sqrt{5 \cdot 1^2 + 4} \right] + k = 1 \Rightarrow \frac{3}{5} + k = 1 \Rightarrow k = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{5} \cdot \left[\sqrt{5x^2 + 4} \right] + \frac{2}{5} = \frac{2 + \sqrt{5x^2 + 4}}{5}.$$

Ejercicio A.3

Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Estudiar y obtener las asíntotas.
 - b) (1 punto). Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.
 - c) (0,5 puntos). Representar gráficamente la función.
-

a) Asíntotas verticales.

Como se trata de una función racional podrá tener asíntotas verticales en los valores que anulan el denominador. Como

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = +\infty,$$

f tiene una asíntota vertical de ecuación $x = -5$.

Asíntotas horizontales.

Estudiamos el comportamiento de la función en los extremos:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x - 20}{-x + 1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 1} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La función no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas.

Al ser el numerador un polinomio de un grado más que el denominador, ya sabemos que va a tener asíntota oblicua y que se calcula fácilmente haciendo la división (su ecuación coincide con el cociente y es la forma más práctica de calcularla). No obstante, nosotros aplicamos teoría "pura y dura" porque queda más "elegante" y "parece que sabemos más":

No puede tener asíntota oblicua por la izquierda (cuando $x \rightarrow -\infty$) puesto que tiene rama asíntótica horizontal. Veamos qué ocurre por la derecha (cuando $x \rightarrow +\infty$):

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x^2 + 5x} = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow m = 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} - 3x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10x - 20}{x} = -10 \Rightarrow n = -10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La función tiene una rama asíntótica oblicua por la derecha de ecuación $y = 3x - 10$.

Hacemos el mismo estudio por la izquierda:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^2 - 5x - 20}{-x + 5}}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x - 20}{x^2 - 5x} = 3 \Rightarrow m = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(-x) - m(-x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 - 5x - 20}{-x + 5} + 3x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x - 20}{-x + 5} = -10 \Rightarrow n = -10 \end{aligned}$$

Es decir, se trata de la misma recta.

b) Concavidad y convexidad.

Toda esta información nos la ofrece el signo de la segunda derivada, así que, manos a la obra:

$$f'(x) = \frac{(6x+5)(x+5) - (3x^2+5x-20)}{(x+5)^2} = \frac{6x^2+35x+25-3x^2-5x+20}{(x+5)^2} = \frac{3x^2+30x+45}{(x+5)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(6x+30)(x+5)^2 - (3x^2+30x+45) \cdot 2(x+5)}{(x+5)^4} = \frac{(6x+30)(x+5) - (3x^2+30x+45) \cdot 2}{(x+5)^3} =$$
$$= \frac{6x^2+60x+150-6x^2-60x-90}{(x+5)^3} = \frac{60}{(x+5)^3}.$$

Se trata de una fracción de numerador positivo y cuyo denominador será positivo cuando x sea mayor que -5 y negativo cuando x sea menor que -5 . De esta forma resulta sencillo concluir

- La función f es convexa $\forall x \in (-\infty, -5)$.
- La función f es cóncava $\forall x \in (-5, +\infty)$.

¡Ojo! Que f no tiene punto de inflexión en $x = -5$ aunque cambie la curvatura. Recuerda que es una asíntota vertical.

c) Representación gráfica.

Conocemos sus asíntotas, su comportamiento en los extremos y su curvatura. El estudio lo podemos completar calculando los puntos de corte con el eje X y sus máximos y mínimos relativos.

- Puntos de corte con el eje X .

$$3x^2 + 5x - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 240}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{265}}{6} \approx \begin{cases} +1,88 \\ -3,55 \end{cases}$$

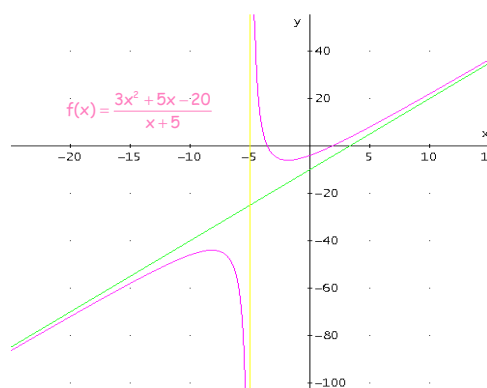
- Máximos y mínimos relativos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 + 30x + 45}{(x+5)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 30x + 45 = 0 \Rightarrow x^2 + 10x + 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 60}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{40}}{2} = -5 \pm \sqrt{10} \approx \begin{cases} -1,83 \\ -8,16 \end{cases}$$

Vaya, no han salido muy simpáticos, pero bueno, para eso están las calculadoras. Si consideramos la curvatura, necesariamente el primero ha de ser mínimo y el segundo, máximo. Aproximamos sus segundas coordenadas y hacemos un esbozo de su gráfica.

$$f(1,32) \approx -6,03; f(-8,16) \approx -43,97$$



Ejercicio A.4

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

- a) (1 punto). ¿Es continua en el punto $x = 0$?
 - b) (1 punto). ¿Es derivable en el punto $x = 0$?
 - c) (1 punto). ¿Alcanza algún extremo?
-

a) Continuidad en $x = 0$.

Estudiamos sus límites laterales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{-x} - 1) = e^0 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) = 0^2 + 0 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \text{f es continua en } x = 0.$$

Se verifican las dos condiciones de continuidad: coincidencia de los límites laterales (1) y que el valor del límite coincida con el valor de la función en el punto (2).

b) Derivabilidad en $x = 0$.

Como ya hemos visto en el apartado anterior, se cumple la primera condición de derivabilidad: la función es continua en $x = 0$.

Sólo queda comprobar si coinciden las derivadas laterales:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = -e^0 = -1 \\ f'(0^+) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

Como las derivadas laterales son distintas, no se cumple la segunda condición de derivabilidad, y por lo tanto, **f no es derivable en $x = 0$.**

c) Extremos.

Vamos a buscar máximos y mínimos relativos entre los valores que anulan la derivada en cada tramo de la función a trozos:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -e^{-x} = 0 & \text{con } x < 0 \Rightarrow -1/e^x = 0 & \text{con } x < 0 & (\text{imposible}) \\ 2x + 1 = 0 & \text{con } x > 0 \Rightarrow x = -1/2 & \text{con } x > 0 & (\text{imposible}) \end{cases}$$

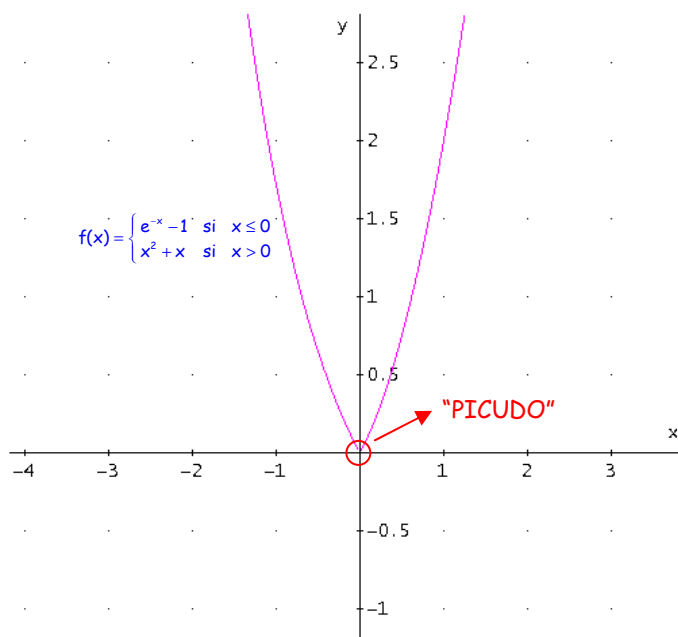
Pues no tiene extremos relativos dentro de cada tramo.

Sólo nos queda comprobar qué ocurre en $x = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} f_1'(x) = -\frac{1}{e^x} < 0 \quad \forall x < 0 \Rightarrow f \text{ es decreciente en } (-\infty, 0) \\ f_2'(x) = 2x + 1 > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow f \text{ es creciente en } (0, +\infty) \end{array} \right\}.$$

Anda, resulta que la función cambia de decreciente a creciente en $x = 0$, pues no cabe más remedio que concluir que **(0,0) es un mínimo relativo no derivable**.

Vamos a hacer una gráfica y comprobamos que, efectivamente, en el origen de coordenadas hay un punto "picudo" o "anguloso", como llamamos coloquialmente en clase a los puntos no derivables:



OPCIÓN B

Ejercicio B.1

Un estudio indica que, entre las 12:00 horas y las 19:00 horas de un día laborable típico, la velocidad (en km/h) de tráfico en cierta salida de una autovía viene dada por la siguiente función:

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 20, \quad 0 \leq x \leq 7$$

donde x es el número de horas después del mediodía ($x=0$ corresponde a las 12:00 horas).

Representar gráficamente $f(x)$, para $0 \leq x \leq 7$, estudiando: los puntos de corte con el eje OY, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad. Calcular las horas en las que se presentan máximos, mínimos y puntos de inflexión para la velocidad del tráfico.

- Puntos de corte con el eje OY.

Sólo puede tener un punto de corte, en concreto, cuando $x=0$.

$f(0) = 20 \Rightarrow$ la función corta al eje OY en el punto $(0,20)$.

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Debemos analizar el signo de la derivada:

$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 42x + 60 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}.$$

f'		+	Máximo relativo	-	Mínimo relativo	+	
f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	5	$\nearrow$	7

$$f'(1) > 0; \quad f'(3) < 0; \quad f'(6) > 0.$$

- La función f es creciente $\forall x \in (0,2) \cup (5,7)$.
- La función f es decreciente $\forall x \in (2,5)$.

Concavidad y convexidad.

Estudiamos el signo de la segunda derivada:

$$f''(x) = 12x - 42; \quad f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 42 = 0 \Rightarrow x = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}.$$

f'		-	Punto de Inflexión	+	
f	0	CONVEXA	$\frac{7}{2}$	CÓNCAVA	7

$$f''(1) < 0; \quad f''(6) > 0.$$

- La función f es convexa $\forall x \in \left(0, \frac{7}{2}\right)$.
- La función f es cóncava $\forall x \in \left(\frac{7}{2}, 7\right)$.

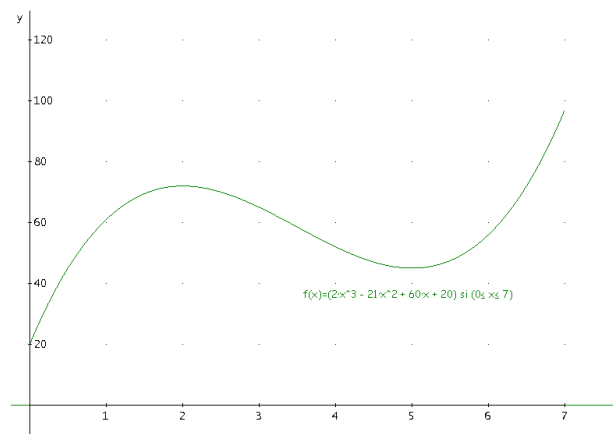
Máximos, mínimos y puntos de inflexión.

Según el estudio del crecimiento y del decrecimiento de la función:

- La función f tiene un máximo relativo en el punto $(2, 72)$.
- La función f tiene un mínimo relativo en el punto $(5, 45)$.
- La función f tiene un máximo absoluto en el punto $(7, 97)$.
- La función f tiene un mínimo absoluto en el punto $(0, 20)$.

En consecuencia,

- La velocidades máximas se alcanzan a las 14:00 horas (máximo relativo, 72 km/h) y a las 19:00 horas (máximo absoluto, 97 km/h).
- La velocidades mínimas se alcanzan a las 17:00 horas (mínimo relativo, 45 km/h) y a las 12:00 horas (mínimo absoluto, 20 km/h).



Ejercicio B.2

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} & \text{si } x \geq -1 \\ \frac{2x}{x-1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Se pide:

- (0,5 puntos). Estudiar el dominio y la continuidad de f .
- (1,5 puntos). Hallar las asíntotas de la gráfica de f .
- (1 punto). Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

a) Dominio de definición.

Los valores que anulan el denominador son $x = 0$ para $f_1(x)$ y $x = 1$ para $f_2(x)$, pero este último no pertenece al dominio de definición de $f_2(x)$, por lo tanto:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Continuidad.

- $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow f \text{ es discontinua en } x = 0.$$

- $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x-1} = \frac{-2}{-1-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \frac{1-3+1}{-1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 = f(-1) \Rightarrow f \text{ es continua en } x = -1.$$

- La función f tiene una discontinuidad asintótica de salto infinito en $x = 0$.
- La función f tiene es continua en el resto de valores para los que está definida.

b) Asíntotas verticales.

Como hemos visto en el apartado anterior, la función tiene una asíntota vertical en $x = 0$, donde se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Asíntotas horizontales.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{-x-1} = \frac{-2}{-1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La función tiene una rama asintótica horizontal por la izquierda de ecuación $y = 2$.

Asíntotas oblicuas.

No puede tener asíntota oblicua por la izquierda (cuando $x \rightarrow -\infty$) puesto que tiene rama asíntótica horizontal. Veamos qué ocurre por la derecha (cuando $x \rightarrow +\infty$):

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + 3x + 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2} = 1 \Rightarrow m = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + 3x + 1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{x} = 3 \Rightarrow n = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La función tiene una rama asíntótica oblicua por la derecha de ecuación $y = x + 3$.

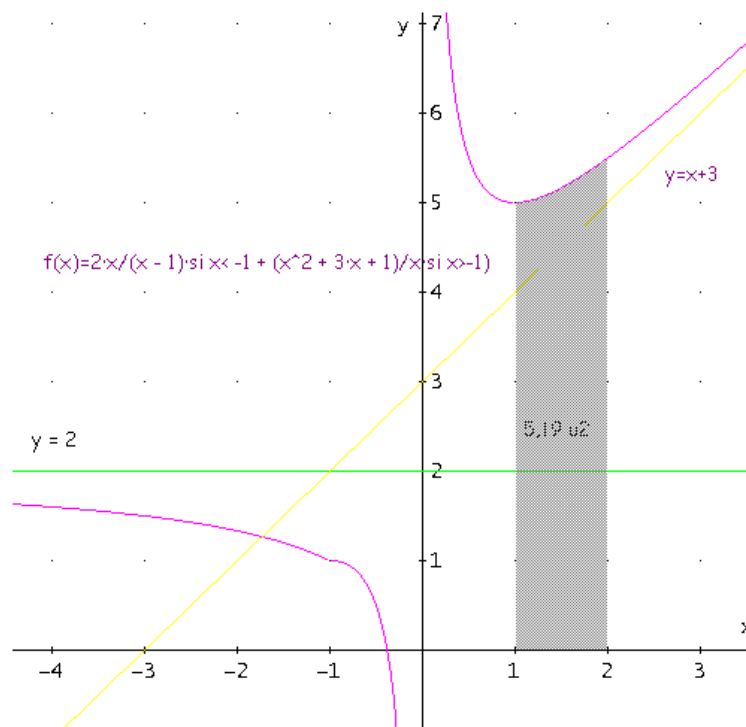
c) Para calcular el área del recinto debemos saber si la función corta al eje X en el intervalo (1,2):

$$f_1(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \approx \begin{cases} -0,38 \notin (1,2) \\ -2,61 \notin (1,2) \end{cases}$$

Además, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2} > 0$, con lo que el área del recinto coincide con la integral definida:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x} dx = \int_1^2 \left(x + 3 + \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln x \right]_1^2 = \\ &= \left(\frac{2^2}{2} + 3 \cdot 2 + \ln 2 \right) - \left(\frac{1^2}{2} + 3 \cdot 1 + \ln 1 \right) = 2 + 6 + \ln 2 - \frac{1}{2} - 3 = \left(\frac{9}{2} + \ln 2 \right) u^2 \approx 5,19 u^2. \end{aligned}$$

Ahora, como tenemos tiempo, hacemos un dibujo de la función para comprobar que el estudio realizado es coherente. (No puntúa, pero "mola"):



Ejercicio B.3

Calcular los límites:

a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{a/x}$.

b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x}$.

a) Pues resulta sencillo si conocemos la propiedad que se aplica para resolver límites del número e y la regla de L'Hôpital; vamos, que se hace en una línea:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{a/x} \stackrel{(1)^\infty}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan(x) - 1) \cdot \frac{a}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \arctan(x)}{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{1+x^2}}{1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{1+x^2}} = e^a.$$

b) Y este todavía más sencillo si utilizamos la comparación de infinitos. En primer lugar, despreciamos la parte polinómica pues las exponenciales son infinitos de orden superior; y después, al tener el numerador y el denominador exactamente el mismo orden, dividimos sus coeficientes, o simplemente simplificamos e^x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2e^x}{7x + 5e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{e^x}}{\cancel{5} \cdot \cancel{e^x}} = \frac{2}{5}.$$

Ejercicio B.4

Calcular:

a) (1 punto). $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

b) (1 punto). $\int_0^\pi x \cdot \cos x dx$.

a) Con un pedacito de esa habilidad que os caracteriza, podéis convertirla en una integral cuasi inmediata, con aspecto de potencia:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int_0^1 x \cdot (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 -2x \cdot (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(4-x^2)^{1/2}}{1/2} \right]_0^1 = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left[2\sqrt{4-x^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \cdot \left[(2\sqrt{3}) - (4) \right] = -\sqrt{3} + 2 = 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

b) Esta otra, a poquita experiencia que tengáis, os tiene que "oler" al método de integración por partes:

$$\int_0^\pi x \cdot \cos x dx \stackrel{(*)}{=} \left[x \cdot \sin x - \int \sin x dx \right]_0^\pi = \left[x \cdot \sin x + \cos x \right]_0^\pi =$$

$$\begin{aligned} (*) \quad u &= x \Rightarrow du = dx \\ dv &= \cos x dx \Rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x \end{aligned}$$

$$= (\pi \cdot \sin \pi + \cos \pi) - (0 \cdot \sin 0 + \cos 0) = (-1) - (1) = -2.$$