INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

Calificación total máxima: 10 puntos

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 3 puntos

Se consideran las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2-a & 1 & a \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) (1,5 puntos). Según los valores de $a \in \mathrm{IR}$, estudie el rango de P.

b) (1,5 puntos). Para el caso $a = 1$, halle X tal que $P \cdot X = Q$.

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 3 puntos

Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales, en función de β:

$$S \equiv \begin{cases} x - y - z = 6 \\ 2x + 4y + 2z = -\beta \\ 3x + \beta y + z = \beta \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\beta = 0$.

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 2 puntos

Obtener las matrices A y B que cumplen las condiciones:

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4.-. **Calificación máxima**: 2 puntos

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, calcula A^3 y A^{38}.

OPCIÓN **B**

***Ejercicio 1*.- Calificación máxima**: 3 puntos

Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros, respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40.500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30% de las cajas.

***Ejercicio 2*.- Calificación máxima**: 2 puntos

Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

b) (1 punto). Obtener la matriz inversa de A para $a=-1$.

***Ejercicio 3*.- Calificación máxima**: 2 puntos

Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x-y=\lambda \\ \lambda x-2y=4 \\ 3x-y=2 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.

b) (0,5 puntos). Resolver el sistema cuando sea posible.

***Ejercicio 4*.- Calificación máxima**: 3 puntos

a) (1,5 puntos). Halla las matrices A que verifican la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot A=\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b) (1,5 puntos). Dadas la matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -7 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

calcular el determinante de $B\cdot C-2A^{t}$.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio A.1

Se consideran las matrices $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2-a & 1 & a \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix}$ y $Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) (1,5 puntos). Según los valores de $a \in IR$, estudie el rango de P.
b) (1,5 puntos). Para el caso $a=1$, halle X tal que $P \cdot X = Q$.

---

a) Calculamos el determinante de la matriz P:

$$|P| = 3a + 18 - 9a - 9 - 2a + a^2 = a^2 - 8a + 9.$$

Vemos que valores lo anulan:

$$a^2 - 8a + 9 = 0 \Rightarrow a = \frac{8 \pm \sqrt{64-36}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 4 \pm \sqrt{7}$$

Por lo tanto,

- Si $a \neq 4 \pm \sqrt{7}$, $|P| \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(P) = 3$
- Si $a = 4 + \sqrt{7}$, la matriz P queda

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2-\sqrt{7} & 1 & 4+\sqrt{7} \\ 3 & 3 & 4+\sqrt{7} \end{pmatrix}; \quad \text{como} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(P) = 2.$$

- Si $a = 4 - \sqrt{7}$, la matriz P queda

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2+\sqrt{7} & 1 & 4-\sqrt{7} \\ 3 & 3 & 4-\sqrt{7} \end{pmatrix}; \quad \text{como} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(P) = 2.$$ (1,5 puntos)

b) Resolvemos la ecuación matricial:

$P \cdot X = Q \Rightarrow P^{-1} \cdot P \cdot X = P^{-1} \cdot Q \Rightarrow I \cdot X = P^{-1} \cdot Q \Rightarrow X = P^{-1} \cdot Q$. (0,5 puntos)

Calculamos P^{-1} para $a=1$:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad |P| = 3 + 9 - 9 - 1 = 2.$$

Los adjuntos son

$$P_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2; \qquad P_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8; \qquad P_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$P_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2; \qquad P_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -9; \qquad P_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$P_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \qquad P_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3; \qquad P_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Luego $P^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 8 & -2\\ 2 & -9 & 3\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}$, y la matriz X es:

$$X=P^{-1}\cdot Q=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 8 & -2\\ 2 & -9 & 3\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 14 & -14\\ 5 & -15 & 17\\ -1 & 5 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 7 & -7\\ \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} & \frac{17}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}.$$

(1 punto)

Ejercicio A.2

Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales, en función de β:

$$S\equiv\begin{cases}x-y-z=6\\ 2x+4y+2z=-\beta\\ 3x+\beta y+z=\beta\end{cases}$$

Resolver el sistema para $\beta=0$.

Aplicamos el teorema de Rouché-Fröbenius a las matrices asociadas al sistema de ecuaciones:

$$AB=\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & \beta & 1\end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix}6\\ -\beta\\ \beta\end{matrix}\right.\right);\ |A|=4-6-2\beta+12+2-2\beta=-4\beta+12;\ |A|=0\Rightarrow -4\beta+12=0\Rightarrow\beta=3.$$

- Si $\beta\neq 3$, $|A|\neq 0\Rightarrow ran(A)=3=ran(AB)=$ número de incógnitas $\Rightarrow$

  $\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única)

- Si $\beta=3$, la matriz queda $AB=\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix}6\\ -3\\ 3\end{matrix}\right.\right)$. Como $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=6\neq 0\Rightarrow ran(A)=2$.

  Por otra parte, $\begin{vmatrix}1 & -1 & 6\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix}=12+9+36-72+6+9=0\Rightarrow ran(AB)=2$.

  Aplicando el teorema se obtiene: $ran(A)=2=ran(AB)<$ número de incógnitas $\Rightarrow$

  $\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

(2 puntos)

Para $\beta=0$, la matriz queda $AB=\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix}6\\ 0\\ 0\end{matrix}\right.\right)$. Aplicamos la regla de Cramer:

$|A|=4-6+12+2=12$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}6 & -1 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}}{12}=\frac{24}{12}=2\,;\qquad y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}}{12}=\frac{24}{12}=2\,;$$

$$z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 6\\ 2 & 4 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{vmatrix}}{12}=-\frac{72}{12}=-6\,.$$

Solución: $(x,y,z)=(2,2,-6)$.

(1 punto)

Ejercicio A.3

Obtener las matrices A y B que cumplen las condiciones:

$$3A+2B=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}\quad y\quad 2A-3B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -6\end{pmatrix}.$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones matriciales por el método de reducción:

$$\begin{cases}3A+2B=C\\ 2A-3B=D\end{cases}\overset{2E_1-3E_2}{\Rightarrow}\; 13\cdot B=2C-3D\Rightarrow 13\cdot B=\begin{pmatrix}16 & 6\\ 10 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & -18\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13\cdot B=\begin{pmatrix}13 & 0\\ 13 & 26\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$ (1 punto)

$$\begin{cases}3A+2B=C\\ 2A-3B=D\end{cases}\overset{3E_1+2E_2}{\Rightarrow}\; 13\cdot A=3C+2D\Rightarrow 13\cdot A=\begin{pmatrix}24 & 9\\ 15 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 4\\ -2 & -12\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13\cdot A=\begin{pmatrix}26 & 13\\ 13 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$ (1 punto)

Ejercicio A.4

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, calcula A^3 y A^{38}.

Calculamos las sucesivas potencias de la matriz A:

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\mathrm{Id}\Rightarrow A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$ (0,5 puntos)

$$A^{38}=A^{3\cdot 12+2}=A^{3\cdot 12}\cdot A^2=\left(A^3\right)^{12}\cdot A^2=(\mathrm{Id})^{12}\cdot A^2=\mathrm{Id}\cdot A^2=A^2\Rightarrow A^{38}=\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$ (1,5 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN B,

Ejercicio B.1

Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros, respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40.500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30% de las cajas.

Variables.

$x \equiv$ número de cajas compradas en el primer mercado.

$y \equiv$ número de cajas compradas en el segundo mercado.

$z \equiv$ número de cajas compradas en el tercer mercado. (0,5 puntos)

Planteamiento y resolución.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1500 \\ 30x & + & 20y & + & 40z & = & 40500 \\ & & & & x & = & 0{,}3\cdot 1500 \end{array}\right. \underset{F_2/10}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1500 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & = & 4050 \\ & & & & x & = & 450 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y+z=1050 \\ 2y+4z=2700 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y+z=1050^{(*)} \\ y+2z=1350 \end{array}\right. \overset{E_2-E_1}{\Rightarrow} z=300 \overset{(*)}{\Rightarrow} y=750\,.$$ (2 puntos)

Solución. La empresa envasadora ha comprado 450, 750 y 300 cajas de pescado, respectivamente, en los tres mercados donde se abastece. Por lo tanto habrá pagado:

- PRIMER MERCADO: $450\cdot 30 = 13.500$ €.
- SEGUNDO MERCADO: $750\cdot 20 = 15.000$ €.
- TERCER MERCADO: $300\cdot 40 = 12.000$ €. (1,5 puntos)

Ejercicio B.2

Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

b) (1 punto). Obtener la matriz inversa de A para $a=-1$.

---

a) Calculamos el determinante de la matriz A:

$$|A| = a^3+1+1-a-a-a = a^3-3a+2\,.$$

Calculamos cuándo se anula aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\left|A\right| = 0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 \cdot (a+2) = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

- Si $a \neq 1, a \neq -2,$ $\left|A\right| \neq 0 \Rightarrow \operatorname{ran}(A) = 3$.
- Si $a = 1$, la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; como las tres filas son iguales, $\operatorname{ran}(A) = 1$.
- Si $a = -2$, la matriz queda $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow$ $\operatorname{ran}(A) = 2$.

(1 punto)

b) Para $a = -1$, tenemos $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\left|A\right| = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = 4$; y sus adjuntos son:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1 punto)

Ejercicio B.3

Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.

b) (0,5 puntos). Resolver el sistema cuando sea posible.

---

a) Formamos la matriz asociada al sistema de ecuaciones

$$AB = \left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & -1 \\ \lambda & -2 \\ 3 & -1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} \lambda \\ 4 \\ 2 \end{matrix} \right.\right)$$

y estudiamos los rangos para aplicar el teorema de Rouche:

$\left|AB\right| = -8-12-\lambda^2+6\lambda+2\lambda+8 = -\lambda^2+8\lambda-12$; $\left|AB\right| = 0 \Rightarrow -\lambda^2+8\lambda-12=0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-8\pm 4}{-2} = \begin{cases} 2 \\ 6 \end{cases}$

- Si $\lambda \neq 2, \lambda \neq 6$, $\left|AB\right| \neq 0 \Rightarrow ran(AB) = 3 \neq ran(A) = 2 \Rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución).
- Si $\lambda = 2$, la matriz queda $AB = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$.

  Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow ran(A) = 2 = ran(AB) = n^{o}$ de incógnitas $\Rightarrow$

  $\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO. (Solución única)
- Si $\lambda = 6$, la matriz queda $AB = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 6 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$.

  Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow ran(A) = 2 = ran(AB) = n^{o}$ de incógnitas $\Rightarrow$

  $\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO. (Solución única)

(1,5 puntos)

b) Para $\lambda = 2$, se tiene $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$. Restando la primera ecuación menos la segunda se obtiene $y = -2$. Sustituyendo en la primera ecuación se deduce $x = 0$. (0,25 puntos)

De la misma forma, para $\lambda = 6$, el sistema es $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 6x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$. Si restamos la tercera ecuación menos la primera, se obtiene $x = -4$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación, deducimos $y = -14$. (0,25 puntos)

Ejercicio B.4

a) (1,5 puntos). Halla las matrices A que verifican la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b) (1,5 puntos). Dadas la matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -7 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

calcular el determinante de $B \cdot C - 2A^t$.

---

a) Se trata de la expresión matricial de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Se puede resolver como una ecuación matricial, utilizando la inversa de la matriz de coeficientes $\left[C \cdot A = B \Rightarrow ... \Rightarrow A = C^{-1} \cdot B\right]$, o aplicando la regla de Cramer. Lo hacemos de esta segunda forma:

$$|C| = 6+6+6-27-8-1 = -18$$

$$x = \frac{|C_x|}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{36+12+18-54-24-6}{-18} = 1;$$

$$y = \frac{|C_y|}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{12+18+36-54-24-6}{-18} = 1;$$

$$z = \frac{|C_x|}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{18+36+12-54-24-6}{-18} = 1.$$

Por lo tanto,

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \text{(1,5 puntos)}$$

b) Calculamos la matriz resultante de hacer $B \cdot C - 2A^t$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 1 \\ 9 & -12 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -14 & 2 \\ 6 & -10 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Y, ahora, su determinante:

$$\text{DET} = 8+24-12-6+24-16 = 22. \quad \text{(1,5 puntos)}$$