INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

Calificación total máxima: 10 puntos

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 3 puntos

Sea $f(x) = e^x + \ln(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

a) (1,5 puntos). Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y sus asíntotas.

b) (1,5 puntos). Pruébese que f tiene un punto de inflexión en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ y esbócese la gráfica de f.

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 3 puntos

De la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, y que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 2 puntos

a) (1 punto). Dibuja la gráfica de la función $\frac{1}{4 - x^2}$, calculando previamente el dominio, los extremos y las asíntotas.

b) (1 punto). Halla el área delimitada por $g(x) = x + 2$ y $h(x) = 4 - x^2$.

Ejercicio 4.-. **Calificación máxima**: 2 puntos

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right)$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$.

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 3 puntos

Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 10 cm^2; el margen superior debe medir 3 cm.; el inferior, 2 cm., y los márgenes laterales, 4 cm. cada uno.

Calcular las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 2 puntos

Sea f la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

a) (0,5 puntos). Estudia las asíntotas de la gráfica de f.

b) (1 punto). Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

c) (0,5 puntos). Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 2 puntos

Considera la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$.

a) (0,5 puntos). Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$.

b) (1,5 puntos). Calcula el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f, la recta de ecuación $x = 2$ y la recta tangente obtenida en a).

Ejercicio 4.- **Calificación máxima**: 3 puntos

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) (1 punto). ¿Es continua en el punto $x = 0$?

b) (1 punto). ¿Es derivable en el punto $x = 0$?

c) (1 punto). ¿Alcanza algún extremo?

SOLUCIONES

OPCIÓN A,

Ejercicio A.1

Sea $f(x)=e^x+\ln(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

a) (1,5 puntos). Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y sus asíntotas.

b) (1,5 puntos). Pruébese que f tiene un punto de inflexión en el intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$ y esbócese la gráfica de f.

---

a) ***Intervalos de crecimiento y decrecimiento.***

Calculamos la derivada de la función para analizar su signo:

$f'(x)=e^x+\frac{1}{x}>0 \quad \forall x\in(0,+\infty)\Rightarrow$ f es siempre creciente. **(0,75 puntos)**

Asíntotas.

Asíntotas verticales: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x+\ln(x)\right)=-\infty\Rightarrow x=0$.

Asíntotas horizontales: No tiene pues $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+\ln(x)\right)=+\infty$.

Asíntotas oblicuas: $y=mx+n$; $m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\ln x}{x}=+\infty\Rightarrow$ No tiene. **(0,75 puntos)**

b) ***Puntos de inflexión.***

Son valores que hacen cero la segunda derivada. La calculamos:

$$f''(x)=e^x-\frac{1}{x^2}$$

Estudiamos el valor de la segunda derivada en los extremos del intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} f''\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{e}-4<0 \\ f''(1)=e^1-\frac{1}{1^2}=e-1>0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

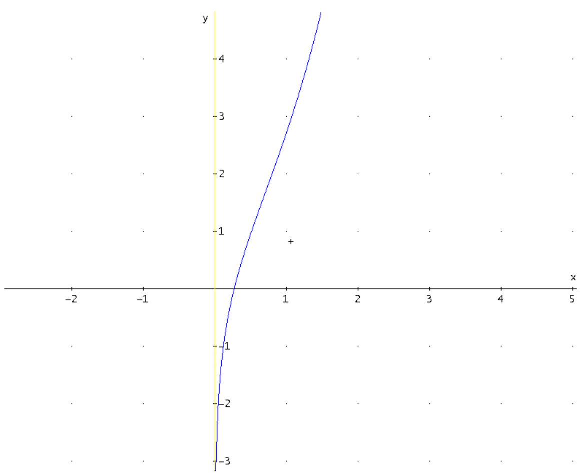
$\Rightarrow$(Por el Teorema de Bolzano) ha de existir al menos un valor $c\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ tal que $f''(c)=0$. Por lo tanto la función f(x) tiene un punto de inflexión en $\left[\frac{1}{2},1\right]$. **(1 punto)**

Gráfica.

TABLA

x	y
0,2	-0,38
0,4	0,58
0,6	1,31
0,8	2,00
1	2,72
1,2	3,50

(0,5 puntos)



Ejercicio A.2

De la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, y que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

Calculamos la primera y segunda derivada de la función:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$.

- **Máximo en x = -1** $\Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$ (1)
- **Pasa por el punto (-2, 0)** $\Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 0$ (2)
- **Punto de inflexión en x = 0** $\Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$ (3)
- **Pendiente 9 en x = 2** $\Rightarrow f'(2) = 9 \Rightarrow 12a + 4b + c = 9$ (4)

Formamos un sistema de ecuaciones con (1) y (4):

$$\begin{cases} 3a + c = 0 \\ 12a + c = 9 \end{cases} \Rightarrow 9a = 9 \Rightarrow a = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} 3 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = -3 \overset{(2)}{\Rightarrow} -8 + 6 + d = 0 \Rightarrow d = 2.$$

Por lo tanto, la función buscada es $f(x) = x^3 - 3x + d$. **(3 puntos)**

Ejercicio A.3

a) (1 punto). Dibuja la gráfica de la función $\frac{1}{4 - x^2}$, calculando previamente el dominio, los extremos y las asíntotas.

b) (1 punto). Halla el área delimitada por $g(x) = x + 2$ y $h(x) = 4 - x^2$.

----

a) ***Dominio.***

$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / 4 - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$. **(0,25 puntos)**

Extremos.

Analizamos cuando la derivada es cero:

$$f'(x) = \frac{2x}{(4 - x^2)^2}; \; f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Representamos la solución en la recta real y estudiamos el signo de la derivada en cada semirrecta:

f'	-	**Mín**	+
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

$$f'(-1) = \frac{-}{+} = -; \; f'(1) = \frac{+}{+} = +$$

Por lo tanto, la función tiene un mínimo relativo en $\left(0, \frac{1}{4}\right)$. **(0,25 puntos)**

Asíntotas.

<u>Asíntotas verticales</u>: $x = \pm 2$.

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$

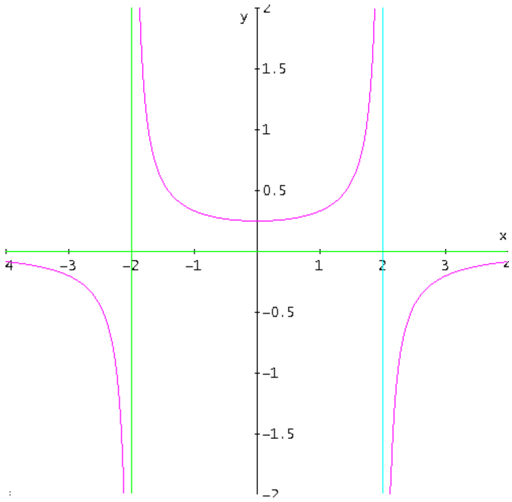
<u>Asíntotas horizontales</u>: $y = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{4 - x^2} = 0$.

<u>Asíntotas oblicuas</u>: No tiene por tener asíntota horizontal. **(0,25 puntos)**

Representación gráfica.

x	y
0	1/4
-1	1/3
1	1/3
3	-1/5
-3	-1/5

(0,25 puntos)



b) ***Área.***

Para averiguar los límites de integración, calculamos los puntos de intersección de g y h, en concreto, los valores de x:

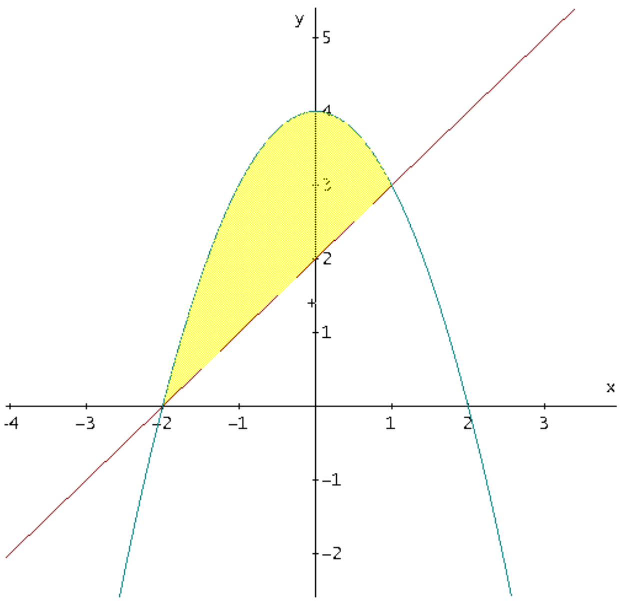
$$\begin{cases} y = x+2 \\ y = 4-x^2 \end{cases} \overset{\text{IGUALACIÓN}}{\Rightarrow} x+2 = 4-x^2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

El área será:

$$A = \int_{-2}^{1}\left[h(x)-g(x)\right]dx = \int_{-2}^{1}\left[-x^2-x+2\right]dx = \left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right) = \frac{9}{2}\,u^2.$$ **(1 punto)**

Gráficamente, ésta es la superficie calculada:



Ejercicio A.4

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}$.

---

a) Se trata de una indeterminación del tipo $(\infty-\infty)$. Calculamos el límite multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1.$$ **(1 punto)**

b) En este caso es una indeterminación del tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Para calcular el valor del límite debemos aplicar la regla de L´Hôpital en tres ocasiones:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+\operatorname{tg}^2x-\cos x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{2\cdot\operatorname{tg}x\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2x\right)+\operatorname{sen}x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{2\cdot\operatorname{tg}x+2\cdot\operatorname{tg}^3x+\operatorname{sen}x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cdot(1+\operatorname{tg}^2x)+6\cdot\operatorname{tg}^2x\cdot(1+\operatorname{tg}^2x)+\cos x}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$ **(1 punto)**

SOLUCIONES

OPCIÓN B,

Ejercicio B.1

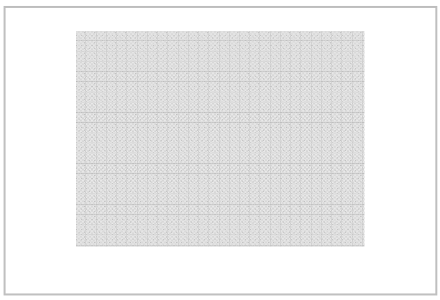
Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 10 cm^2; el margen superior debe medir 3 cm.; el inferior, 2 cm., y los márgenes laterales, 4 cm. cada uno.
Calcular las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Definición de las variables.

x : base de la zona impresa
x + 8 : base del cartel

y: altura de la zona impresa
y + 5: altura del cartel

(0,5 puntos)



Relación entre las variables.
Si el área de la superficie impresa es 10 cm^2, se cumple:

$$x \cdot y = 10. \quad \textbf{(0,5 puntos)}$$

Función objetivo.
Tenemos que buscar el mínimo de la función que determina la superficie del cartel que es

$$f(x,y) = (x+8)\cdot(y+5). \quad \textbf{(0,5 puntos)}$$

Planteamiento y resolución.

$$\begin{cases} x \cdot y = 10 \\ f(x,y) = (x+8)\cdot(y+5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{10}{x} \\ \Downarrow \\ f(x) = (x+8)\cdot\left(\dfrac{10}{x}+5\right) \Rightarrow f(x) = 5x + \dfrac{80}{x} + 50 \end{cases}$$

Calculamos el mínimo de la función:

$$f'(x) = 5 - \frac{80}{x^2}; \; f'(x) = 0 \Rightarrow 5 = \frac{80}{x^2} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \text{ (rechazamos la solución -4)}$$

Comprobamos que, efectivamente, se trata de un mínimo sustituyendo en la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{160}{x^3}; \quad f''(4) = \frac{160}{4^3} > 0 \Rightarrow x = 4 \text{ es un mínimo relativo.} \quad \textbf{(1 punto)}$$

Solución.
Para $x = 4$ se obtiene $y = 2{,}5$. Si añadimos los márgenes, obtenemos la dimensión del cartel: 12 cm. $\times$ 7,5 cm. **(0,5 puntos)**

<u>*Postdata*</u>.- Con este tamaño, más que un cartel parece una postal.

<u>*Ejercicio B.2*</u>

Sea f la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

a) (0,5 puntos). Estudia las asíntotas de la gráfica de f.
b) (1 punto). Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
c) (0,5 puntos). Esboza la gráfica de f.

---

a) <u>Asíntotas verticales</u>: Son los valores que anulan el denominador, es decir, $x = 0$. Estudiamos el comportamiento de la función alrededor de la asíntota:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty.$$

<u>Asíntotas horizontales</u>: No tiene, pues son de la forma $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = \pm\infty$.

<u>Asíntotas oblicuas</u>: Tiene asíntota oblicua (el numerador es un grado mayor que el denominador. La forma más rápida de conseguir su ecuación es hacer la división pues la asíntota coincide con el cociente:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & +1 & x \\ \cline{3-3} -x^2 & & x \\ \hline 0 & +1 & \end{array}$$

Por lo tanto, la asíntota oblicua es $y = x$. **(0,5 puntos)**

b) ***Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.***

Debemos estudiar el signo de la derivada y los valores que la anulan:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+1)\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2};\ f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^2-1}{x^2}=0\Rightarrow x=\pm 1$$

f'	+	**Máx**	-	**Mín**	+
f	$\nearrow$	-1	$\searrow$	1	$\nearrow$

$$f'(-10)=\frac{+}{+}=+;\quad f'(0,5)=\frac{-}{+}=-;\quad f'(10)=\frac{+}{+}=+$$

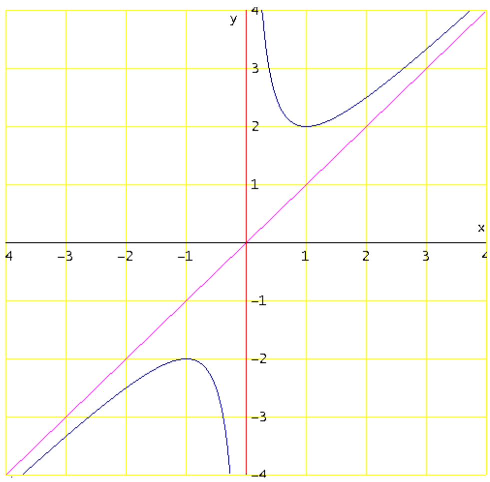
Por lo tanto:

- f es CRECIENTE si $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.
- f es DECRECIENTE si $x\in(-1,0)\cup(0,1)$.
- f tiene un MÁXIMO RELATIVO en el punto $(-1,-2)$.
- f tiene un MÍNIMO RELATIVO en el punto $(1,2)$. **(1 punto)**

c) ***Gráfica.***

x	y
-1	-2
1	2
2	2,5
-2	-2,5

(0,5 puntos)



Ejercicio B.3

Considera la función f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}$.

a) (0,5 puntos). Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=0$.

b) (1,5 puntos). Calcula el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f, la recta de ecuación $x=2$ y la recta tangente obtenida en a).

---

a) ***Recta tangente.***

Tiene por ecuación $r_t\equiv y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$. Calculamos $f(0)$, $f'(x)$ y $f'(0)$:

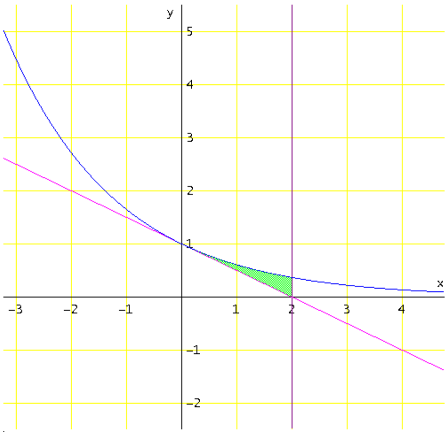
$$f(0)=e^{-\frac{0}{2}}=e^0=1;\ f'(x)=\frac{-e^{-\frac{x}{2}}}{2};\ f'(0)=\frac{-e^{-\frac{0}{2}}}{2}=-\frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente queda:

$$r_t\equiv y-1=-\frac{1}{2}\cdot(x-0)\Rightarrow r_t\equiv y=-\frac{1}{2}\cdot x+1$$ **(0,5 puntos)**

b) ***Área de la región.***

La superficie que pide es la zona coloreada



Calculamos su valor:

$$A=\int_0^2\left[f(x)-r_t(x)\right]dx=\int_0^2\left[e^{-\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}x-1\right]dx\overset{(*)}{=}\left[-2\cdot e^{-\frac{x}{2}}+\frac{x^2}{4}-x\right]_0^2=$$

$$=\left(\frac{-2}{e}+1-2\right)-(-2)=\left(1-\frac{2}{e}\right)u^2.$$

(1,5 puntos)

Ejercicio B.4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} e^{-x}-1 & \text{si} \quad x\le 0\\ x^2+x & \text{si} \quad x>0\end{cases}$.

Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) (1 punto). ¿Es continua en el punto $x=0$?

b) (1 punto). ¿Es derivable en el punto $x=0$?

c) (1 punto). ¿Alcanza algún extremo?

---

a) ***Continuidad.***

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(e^{-x}-1)=e^0-1=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x)=0^2+0=0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)\Rightarrow \text{f es continua en } x=0.$$

(1 punto)

b) ***Derivabilidad.***

$$f'(x)=\begin{cases}-e^{-x} & \text{si} \quad x<0\\ 2x+1 & \text{si} \quad x>0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} f'(0^-)=-e^{-0}=-1\\ f'(0^+)=2\cdot 0+1=1\end{cases}\Rightarrow \text{No existe } f'(0)\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f no es derivable en $x=0$.

(1 punto)

c) ***Extremos.***

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}-e^{-x}=0 & \text{con} \quad x<0 \text{ (Imposible por ser exponencial)}\\ 2x+1=0 & \text{con} \quad x>0\Rightarrow x=-1/2\notin(0,+\infty) \text{ (Se rechaza)}\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f no tiene extremos para $x=0$. Sin embargo, en este punto cambia de decreciente a creciente por lo tanto f tiene un mínimo no derivable en x=0.

(1 punto)