

Problema 1 (5 puntos) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real k

$$\begin{cases} x + ky + kz = k \\ x + y + z = k \\ ky + 2z = k \end{cases}$$

1. Discútase el sistema según los diferentes valores de k .
2. Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
3. Resuélvase el sistema para $k = 4$.

(Modelo 2012 - Opción A)

Solución:

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k & k \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k & 2 & k \end{array} \right); |A| = k^2 - 3k + 2 = 0 \implies k = 1, k = 2$$

■ Si $k \neq 1$ y $k \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{Sistema compatible determinado (solución única)}.$

■ Si $k = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right); |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

■ Si $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right); F_1 = F_2 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies$$

$\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)}$

2.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ 4y + 2z = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

1. Obténgase A^{2007} .

2. Hállese la matriz B tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 1 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

(Modelo 2013 - Opción B)

Solución:

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \implies A^n \begin{cases} A & \text{si } n \text{ es impar} \\ I & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \implies A^{2007} = A$$

2. $A \cdot B = C \implies B = A^{-1}C$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 5 & 1 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (3 puntos) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$

1. Calcúlense los valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1} .

2. Para $a = 2$, calcúlese la matriz $B = (A^{-1}A^T)^2$.

3. Para $a = 2$, calcúlese la matriz X que satisface la ecuación matricial:

$$AX - A^2 = A^T$$

Nota.- A^T representa a la matriz traspuesta de A .
(Modelo 2012 - Opción B)

Solución:

1.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a^2 - 3 = 0 \implies a = \pm\sqrt{3}$$

Si $a = \pm\sqrt{3} \implies$ no existe A^{-1} .

Si $a \neq \pm\sqrt{3} \implies \exists A^{-1}$.

2. Si $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

3. Con $a = 2$:

$$AX - A^2 = A^T \implies X = A^{-1}(A^T + A^2)$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2 \right] = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$