

Problema 1 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x- & 2y- & z = & a \\ ax- & 2y- & az = & 1 \\ x+ & ay+ & z = & 2 \end{cases}$$

1. Discutir el sistema para los diferentes valores de a .
2. Resolver el sistema para el caso en el que tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & a \\ a & -2 & -a & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$|A| = 4a - 4 = 0 \implies a = 1$$

Si $a \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$
 $\implies$ Sistema compatible determinado, con solución única.

Si $a = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Como tiene dos filas iguales podemos concluir con que el $\text{Rango}(\overline{A}) = 2$. Es decir, $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 2 < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$ y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

2. El sistema sería:

$$\begin{cases} x- & 2y- & z = & 1 \\ x+ & y+ & z = & 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x- & 2y = & 1+z \\ x+ & y = & 2-z \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $XA - C = XB - I$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$XA - C = XB - I \implies X(A - B) = C - I \implies X = (C - I)(A - B)^{-1}$$

$$C - I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (C - I)(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 En una visita a una granja apícola nos enseñaron unas instalaciones para 10.000 gallinas. En esta granja había departamentos diferentes, en unos metían gallinas para la puesta de huevos, en otros para la cría y en otros para la investigación de razas. El guía nos dijo que para que esa granja fuera rentable el número de gallinas dedicada a la puesta tenía que ser el triple de las otras dos juntas y que el número de las destinadas a la investigación tenía que ser la tercera parte que el de las destinadas a la cría. ¿Cuántas gallinas hay en cada uno de esos departamentos, sabiendo que están completos?.

Solución:

$$\begin{cases} x + y + z = 10000 \\ x = 3(y + z) \\ z = \frac{y}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 10000 \\ x - 3y - 3z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 7500 \\ y = 1875 \\ z = 625 \end{cases}$$