Problema 1 (5 puntos). Considérese el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & y+ & 3z = & 0 \\ x+ & ay+ & 2z = & 1 \\ x+ & ay+ & 3z = & -1 \end{array}\right.$$

1. Discutir sus posibles soluciones según los valores del parámetro a.
2. Resolver el sistema para $a = 1$ y $a = 0$.

Justificar respuesta. (Extremadura (Junio 2008)).

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|r} a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 & -1 \end{array}\right), \quad |A| = a^2 - 1 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n^o de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \left|\begin{array}{rrr} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{array}\right| = 11 \neq 0$$

En este caso Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible. (No tiene solución)

Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \left|\begin{array}{rrr} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{array}\right| = 1 \neq 0$$

En este caso Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible. (No tiene solución)

Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & 3z = & 0 \\ x+ & & 2z = & 1 \\ x+ & & 3z = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 6 \\ z = -2 \end{array}\right.$$

Problema 2 (3 puntos). En una fábrica de árticulos deportivos se dispone de 10 cajas de diferente tamaño: grandes, medianas y pequeñas para envasar camisetas de atletismo producidas, con capacidad para 50, 30 y 25 camisetas, respectivamente. Si una caja grande fuera mediana, entonces habría el mismo número de grandes y de medianas. En total se envasan 390 camisetas. Determinar el número de cajas que hay de cada clase.

(Castilla La Mancha (Junio 2008))

Solución:

Sea x el nº cajas grandes, y el nº de cajas medianas y z el nº de cajas pequeñas.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ x-1=y+1 \Longrightarrow x-y=2 \\ 50x+30y+25z=390 \Longrightarrow 10x+6y+5z=78 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=3 \\ z=2 \end{array}\right.$$

Problema 3 (2 puntos). Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular A^n.

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$