

Problema 1 En la lista de precios de una cafetería figura la siguiente información:

- Cuatro cafés y un bocadillo cuestan lo mismo que cinco refrescos.
- Cuatro cafés y tres bocadillos cuestan lo mismo que diez refrescos.
- Dos cafés, un refresco y un bocadillo cuestan 9,50 euros.

Calcular el precio de un café, de un refresco y de un bocadillo.

Solución:

x es el precio del café.

y es el precio del bocadillo.

z es el precio del refresco.

$$\begin{cases} 4x + y = 5z \\ 4x + 3y = 10z \\ 2x + y + z = 9,50 \end{cases} \implies \begin{cases} 4x + y = 0 \\ 4x + 3y = 10 \\ 2x + y + z = 9,50 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1,25 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

Problema 2 Dado el sistema

$$\begin{cases} mx + 2y - z = m \\ mx + z = 0 \\ x + 6y - 5z = 3 \end{cases}$$

- Discutir el sistema para los diferentes valores de m .
- Resolver el sistema en el caso de infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & -1 & m \\ m & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & 3 \end{array} \right), \quad |A| = 2 - 2m = 0 \quad m = 1$$

Si $m \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$ y el sistema es Compatible Determinado.

Si $m = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & 3 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

Como

$$|A_1| = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Por el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 2$.

Luego $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) < n^\circ$ de incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado.

b)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \frac{1}{2} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 3 \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m & 5 \end{pmatrix}$$

a) Discutir cuando tiene inversa esta matriz para los diferentes valores de m .

b) Calcular la inversa en el caso de $m = 2$.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m & 5 \end{vmatrix} = -2m^2 + 2 = 0 \implies m = 1 \quad m = -1$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$ entonces $|A| \neq 0$ y existe A^{-1} .

Si $m = 1$ o $m = -1$ entonces $|A| = 0$ y no existe A^{-1} .

b)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 2/3 & -1/6 \\ 4/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$