

Problema 1 Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x + my - z = 0 \\ mx - y + z = 2 \\ mx + 2y - 2z = -2 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema para los diferentes valores de m .
- b) Resolver el sistema en el caso de infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & m & -1 & 0 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ m & 2 & -2 & -2 \end{array} \right), \quad |A| = 3m(m-1) = 0 \quad m=0, \quad m=1$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 0 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$ y el sistema es Compatible Determinado.

Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq -2 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

Como

$$|A_2| = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \implies$ El sistema es Incompatible (No tiene Solución).

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

Como La tercera fila $F_3 = F_1 - F_2 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 2$.

Luego $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) < n^\circ \text{ de incógnitas}$ y el sistema es Compatible Indeterminado.

b)

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{4}{3} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 Una familia dispone de 80 euros mensuales para realizar la compra de la carnicería. El primer mes compran 10 kg de carne de pollo, 6 kg de carne de cerdo y 3 kg de carne de ternera y les sobran 3,1 euros. El mes siguiente adquieren 10 kg de carne de pollo, 7 kg de carne de cerdo, 2 kg de carne de ternera y les sobran 5,1 euros. El tercer mes compran 11 kg de carne de pollo, 6 kg de carne de cerdo, 2 kg de carne de ternera abonando un total de 72 euros y 30 céntimos. Suponiendo que no ha variado el precio de la carne en estos meses ¿cuánto cuesta el kilo de carne de pollo, cerdo y ternera?

Castilla-León (junio 2006)

Solución:

x es el precio del kilo de pollo.

y es el precio del kilo de cerdo.

z es el precio del kilo de ternera.

$$\begin{cases} 10x + 6y + 3z = 76,9 \\ 10x + 7y + 2z = 74,9 \\ 11x + 6y + 2z = 72,3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2,5 \\ y = 5,1 \\ z = 7,1 \end{cases}$$

Problema 3 Encuentra el valor de a que hace que la siguiente matriz no tenga inversa:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$$

y calcula M^{-1} para $a = 0$

La Rioja (Junio 2006)

Solución:

a)

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix} = 6 - a = 0 \implies a = 6$$

Si $a \neq 6$ entonces $|M| \neq 0$ y existe M^{-1} .

Si $a = 6$ entonces $|A| = 0$ y no existe M^{-1} .

b)

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 5/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/6 \end{pmatrix}$$