

Problema 1 (6 puntos) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real m :

$$\begin{cases} 2x+ & y- & z = & -3 \\ x- & 2y+ & 2z = & 1 \\ 2x+ & y+ & mz = & 5 \end{cases}$$

1. Discútase el sistema para los distintos valores de m .
2. Resúelvase el sistema para $m = 0$.

(Islas Baleares (Junio 2010))

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & m & 5 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = -5m - 5 = 0 \Rightarrow m = -1$$

Si $m \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $m = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{array} \right| = -40 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{array} \right| = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$. Luego el sistema es Incompatible.

2. Si $m = 0$ el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} 2x+ & y- & z = & -3 \\ x- & 2y+ & 2z = & 1 \\ 2x+ & y+ & = & 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 7 \\ z = 8 \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos). La suma de las tres cifras de un determinado número es 13. La cifra de las centenas excede en 4 unidades a la de las decenas. Si se intercambia la cifra de las unidades con la de las centenas,

el número aumenta 495 unidades. ¿De qué número se trata? (Castilla León (Junio 2010))

Solución:

Sea xyz el número buscado.

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ x = y + 4 \\ 100z + 10y + x = 100x + 10y + z + 495 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 9 \end{cases}$$

El número es el 409.

Problema 3 (2 puntos). Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & -m & 3 \\ 2 & m & 0 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 0$

Solución:

1. $|A| = 6(m^2 + m - 2) = 0 \implies m = 1, m = -2$: Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies$ existe A^{-1} .

Si $m = 1$ o $m = -2 \implies |A| = 0 \implies$ no existe A^{-1} .

2. Si $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (2 puntos). Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{-1} .

Calcula la matriz $(A - I)A^{-1}$, donde I representa la matriz identidad de orden 2.

(La Rioja (Junio 2010))

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$