

Problema 1 (3 puntos) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} kx - 2y + 7z = 8 \\ x - y + kz = 2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

1. Discútase el sistema para los distintos valores de k .
2. Resúlvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.
3. Resúlvase el sistema para $k = 0$.

(Junio 2010 - Opción B)

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = -k^2 + k + 2 = 0 \Rightarrow k = -1, k = 2$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $k = -1$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$. Luego el sistema es Incompatible.

Si $k = 2$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Tenemos que : $|C_1 C_2 C_3| = |C_1 C_3 C_4| = |C_1 C_2 C_4| = |C_2 C_3 C_4| = 0$

$\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{el Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 2 < \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

2. Si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 7z = 8 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{2}{3} - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{4}{3} \end{cases}$$

3. Si $k = 0$ el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} -2y + 7z = 8 \\ x - y = 2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 12 \\ y = 10 \\ z = 4 \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos) Un estudiante ha gastado un total de 48 euros en la compra de una mochila, un bolígrafo y un libro. Si el precio de la mochila se redujera a la sexta parte, el del bolígrafo a la tercera parte y el del libro a la séptima parte de sus respectivos precios iniciales, el estudiante pagaría un total de 8 euros por ellos. Calcular el precio de la mochila, del bolígrafo y del libro, sabiendo que la mochila cuesta lo mismo que el total del bolígrafo y el libro.

(Modelo 2011 - Opción A)

Solución:

Sea x : precio de la mochila, y : precio del bolígrafo y z : precio del libro.

$$\begin{cases} x + y + z = 48 \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{7}z = 8 \\ x = y + z \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 48 \\ 7x + 14y + 6z = 336 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \\ z = 21 \end{cases}$$

Problema 3 (3 puntos) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene inversa.
2. Para $a = 2$, calcúlese la matriz inversa A^{-1} .
3. Para $a = 2$, calcúlese, si existe, la matriz X que satisface $AX = B$.

(Modelo 2011 - Opción B)

Solución:

$$1. |A| = 5 - a^2 = 0 \implies a = \pm\sqrt{5}:$$

Si $a = \pm\sqrt{5} \implies |A| = 0 \implies A$ no tiene inversa.

Si $a \neq \pm\sqrt{5} \implies |A| \neq 0 \implies A$ si tiene inversa.

2. Para $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3. AX = B \implies X = A^{-1}B:$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (2 puntos) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

1. Estúdiese el rango de A según los valores del parámetro real k .

2. Calcúlese, si existe, la matriz inversa de A para $k = 3$.

(Junio 2015 - Opción B)

Solución:

$$1. |A| = 0 \implies 8 - 4k = 0 \implies k = 2.$$

Si $k \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$.

Si $k = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; |A| = 0, \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

2. $k = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ -3/4 & 2 & -3/2 \end{pmatrix}$$