

Problema 1 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+ & ay- & az = & 2 \\ ax+ & y- & z = & 2a \\ 3x- & y- & z = & a \end{cases}$$

1. Discutir el sistema para los diferentes valores de a .
2. Resolver el sistema para el caso en el que $a = 1$, siempre que sea posible.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -a & 2 \\ a & 1 & -1 & 2a \\ 3 & -1 & -1 & a \end{array} \right)$$

$$|A| = 2a^2 - 2 = 0 \implies a = 1, \quad a = -1$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema compatible determinado, con solución única.

Si $a = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Como la primera y la segunda fila son iguales podemos concluir con que $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) < \text{n}^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema compatible indeterminado.

Si $a = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Como

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Como la segunda fila es igual que la primera, pero multiplicada por -1 podemos concluir con que el $\text{Rango}(\overline{A}) = 2$. Es decir, $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 2 < n^\circ$ de incógnitas y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

2. El sistema sería:

$$\begin{cases} x+ & y- & z = & 2 \\ 3x- & y- & z = & 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x+ & y = & 2+z \\ 3x- & y = & 1+z \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\lambda \\ y = -\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolver, si es posible, la ecuación matricial

$$AX = BC + I_2 \quad \text{donde} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX = BC + I_2 \implies X = A^{-1}(BC + I_2)$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BC + I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(BC + I_2) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Problema 3 La suma de los dígitos de un número de tres cifras es 12. Si a este número le restamos este mismo número pero leído al revés obtenemos -99 . Calcular el número en cuestión sabiendo que dígito de las decenas es un a unidad mayor que el dígito de las unidades.

Solución:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 100x + 10y + z - (x + 10y + 100z) = -99 \\ y - z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x & +y+ & z = & 12 \\ -x & & z = & 1 \\ & y- & z = & 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 4 \end{cases}$$

El número es 354.