

Problema 1 (5 puntos). Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m :

$$\begin{cases} x + 2y - mz = 0 \\ 2x - my = m \\ x + 7y - 3z = -m \end{cases}$$

y resuélvelo para $m = 1$ y $m = 0$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -m & 0 \\ 2 & -m & 0 & m \\ 1 & 7 & -3 & -m \end{array} \right), \quad |A| = -m^2 - 11m + 12 = 0 \implies m = 1, \quad m = -12$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -12 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$
de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Determinado.

Los tres planos se cortan en un punto.

Si $m = -12$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 12 & 0 \\ 2 & 12 & 0 & -12 \\ 1 & 7 & -3 & 12 \end{array} \right)$$

En este caso $\text{Rango}(A) = 2$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 12 & -12 \\ 1 & 7 & 12 \end{vmatrix} = 156 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \implies$ Sistema Incompatible.

Los tres planos se cortan dos a dos.

2. Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & -1 \end{array} \right)$$

En este caso $\text{Rango}(A) = 2$ y como:

$$\begin{vmatrix} 11 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Tenemos $\text{Rango}(\overline{A}) = 2 = \text{Rango}(A) < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{Sistema Compatible Indeterminado}$.

3. ■ Si $m = 1$: El sistema es compatible indeterminado y no tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2/5 + (1/5)\lambda \\ y = -1/5 + (2/5)\lambda \end{cases}$$

- Si $m = 0$:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x = 0 \\ x + 7y - 3z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos). Obtener para todo número natural n , el valor de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

(Madrid (Junio 2009)) **Solución:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A; \quad A^3 = A \cdot A^2 = 2^2 A; \dots, A^n = 2^{n-1} A$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2B; \quad B^3 = B \cdot B^2 = 2^2 B; \dots, B^n = 2^{n-1} B$$

$$A^n + B^n = 2^{n-1} A + 2^{n-1} B = 2^{n-1} (A + B) = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = 2^n \cdot I$$

Problema 3 (2 puntos). Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

se pide:

1. Estudiar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a
2. Obtener la inversa para $a = -1$

(Madrid (junio 2009))

Solución:

1. $|A| = a^3 - 3a + 2 = 0 \implies a = 1, a = -2:$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \implies \text{Rango}(A) = 3.$

Si $a = 1 \implies \text{Rango}(A) = 1.$

Si $a = -2 \implies \text{Rango}(A) = 2.$

2. Si $a = -1 \implies |A| = 4:$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (1 punto). Dada Resolver la ecuación matricial $AX + B = CX + I$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX + B = CX + I \implies X = (A - C)^{-1}(I - B):$$

$$A - C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix}$$

$$I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - C)^{-1}(I - B) = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$