

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & -1 \\ m & -1 & m \\ 3 & m & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 1$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & m+1 & -1 \\ m & -1 & m \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix} = 2m - 4 = 0 \implies m = 2$$

Si $m = 2 \implies |A| = 0 \implies$ no existe A^{-1} .

Si $m \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies$ existe A^{-1} .

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX - B = CX - I$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - B = CX - I \implies (A - C)X = B - I \implies X = (A - C)^{-1}(B - I)$$

$$(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & -1/3 \\ 1/6 & -2/3 \end{pmatrix}, \quad B - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - C)^{-1}(B - I) = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/6 \\ -2/3 & 5/6 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Resolver utilizando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1 \end{bmatrix} = (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 0 \\ x & 1-x & 1-x & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$(x+3) \begin{vmatrix} 0 & x-1 & 0 \\ x-1 & 0 & 0 \\ 1-x & 1-x & 1-x \end{vmatrix} = (x+3)(x-1)^2 \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+3)(x-1)^3$$

Problema 4 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & m & 2 \\ 2 & m & 2 & 1 \\ 3 & m+2 & 3 & m+2 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de m .

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m & 2 & m \\ 2 & m & 2 \\ 3 & m+2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} m & 2 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 3 & m+2 & m+2 \end{vmatrix} = m^3 + m^2 - 8m + 6 = 0 \implies m = 1, m = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} m & m & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & m+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & m & 2 \\ m & 2 & 1 \\ m+2 & 3 & m+2 \end{vmatrix} = -(m^3 + m^2 - 8m + 6) \implies m = 1, m = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2}$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2} \implies \text{Rango}(A) = 3$.

Cuando $m = 1$ o $m = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2} \implies \text{Rango}(A) = 2$, ya que en estos casos el menor $\begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} \neq 0$.