

Problema 1 Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro k :

$$\begin{cases} x + y + z = k \\ (1 + k)x + y + z = 2k \\ x + (1 + k)y + z = 1 \end{cases}$$

Resuélvelo para $k = -1$.

(Islas Baleares (junio 2007))

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ (1+k) & 1 & 1 & 2k \\ 1 & (1+k) & 1 & 1 \end{array} \right), \quad |A| = k^2 = 0 \implies k = 0$$

Si $k \neq 0 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{Sistema Compatible Determinado}$.

Los tres planos se cortan en un punto.

Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

En este caso $\text{Rango}(A) = 1$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \implies \text{Sistema Incompatible}$.

Dos planos coinciden y el otro es paralelo.

2. Si $k = -1$:

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 2 Conocido que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ calcular el valor del siguiente

$$\text{determinante} \begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(Islas Canarias (junio 2007))

Solución:

$$\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} a & -b & c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Problema 3 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$

(Madrid (junio 2007))

Solución:

$$XAX^{-1} = B \implies XA = BX$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a - 9c & 8b - 9d \\ 6a - 7c & 6b - 7d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2a = 8a - 9c \\ -b = 8b - 9d \\ 2c = 6a - 7c \\ -d = 6b - 7d \end{cases} \implies \begin{cases} c = 2/3a \\ d = b \\ 2a = 3c \\ d = b \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2/3a & b \end{pmatrix}$$