

Problema 1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & kz = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \\ kx+ & 2y- & z = & 3 \end{cases}$$

se pide:

1. (2 puntos). Discutirlo según los valores de k .
2. (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 2$.
3. (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 1$.

(Modelo 2016 - Opción A)

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ k & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \quad |A| = -4k^2 + 6k - 2 = 0 \implies k = 1, \quad k = \frac{1}{2}$$

Si $k \neq 1$ y $k \neq 1/2 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.

Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right); \quad |A| = 0; \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{array} \right| = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; \quad |A_2| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right| = 0;$$

$$|A_3| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{array} \right| = 0; \quad |A_4| = \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{array} \right| = 0$$

$$\left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{array} \right| = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 2.$$

Luego $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) < \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es

compatible indeterminado.

Si $m = 1/2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1/2 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right); |A| = 0; \left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1/2 & 2 \end{array} \right| = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 1/2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{array} \right| = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango} \bar{A} = 3 \neq \text{Rango}(A) \Rightarrow \text{sistema incompatible.}$$

2. Si $k = 2$:

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & 2z = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \\ 2x+ & 2y- & z = & 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1/3 \\ z = -1/3 \end{cases}$$

3. Si $k = 1$:

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & z = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda/2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
2. (1 punto) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.
3. (1 punto) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A-X)(A+X) = A^2 - X^2$.

(Septiembre 2005 - Opción A)

Solución:

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 2\alpha \\ 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha = 4 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2, \quad \beta = -1$$

2.

$$\begin{aligned} A^5 &= A^2 A^2 A = (2A - I)^2 A = (4A^2 + I^2 - 4AI)A = (4A^2 - 4A + I)A = \\ &= 4(2A - I)A - 4A^2 + A = 8A^2 - 4IA - 4(2A - I) + A = \\ &= 8(2A - I) - 4A - 8A + 4I + A = 5A - 4I = 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (A - X)(A + X) &= A^2 - X^2 \implies A^2 + AX - XA + X^2 = A^2 - X^2 \\ &\implies AX - XA = 0 \implies AX = XA \end{aligned}$$

Serán todas aquellas matrices X que cumplan $AX = XA$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a + 2c = a \implies c = 0 \\ b + 2d = 2a + b \implies a = d \\ c = c \\ d = d \end{cases}$$

Serán las matrices A de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 3 (3 puntos) Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a .
2. (1,5 punto) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M . Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

(Junio 2006 - Opción B)

Solución:

1.

$$|M| = -2a(a^2 - 1) = 0 \implies a = 0, \quad a = 1, \quad a = -1$$

Si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$ entonces $|M| \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 3$.

Si $a = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 2$$

Si $a = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 2$$

Si $a = -1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 2$$

2. M es inversible para cualquier valor de a distinto de 0, 1 y -1 .

Si $a = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (2 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$

(Junio 2007 - Opción A)

Solución:

$$\begin{aligned} XAX^{-1} = B &\implies XA = BX \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \\ \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8a - 9c & 9b - 9d \\ 6a - 9c & b - d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 6a - 9c = 0 \\ b - d = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b = d \\ c = 2/3a \end{cases} \\ X &= \begin{pmatrix} a & b \\ 2/3a & b \end{pmatrix}, \quad \text{p.e. } X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$