

Problema 1 (6 puntos). Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m dando una interpretación geométrica:

$$\begin{cases} mx + my - 2z = 3 \\ 2x + my + mz = 0 \\ 4x + 3y - 3z = 6 \end{cases}$$

y resuélvelo para $m = 1$ y $m = 2$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & m & -2 & 3 \\ 2 & m & m & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 6 \end{array} \right), \quad |A| = -2(m^2 - 7m + 6) = 0 \implies m = 1, \quad m = 6$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 6 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{Sistema Compatible Determinado.}$

Los tres planos se cortan en un punto.

Si $m = 6$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 6 \end{array} \right)$$

En este caso $\text{Rango}(A) = 2$ y como $\left| \begin{array}{ccc} 6 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \end{array} \right| = 90 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \implies \text{Sistema Incompatible.}$

Los tres planos se cortan dos a dos.

2. Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 6 \end{array} \right)$$

En este caso $\text{Rango}(A) = 2$ y como:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 6 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \end{array} \right| = 0$$

Tenemos $\text{Rango}(\overline{A}) = 2 = \text{Rango}(A) < n^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{Sistema Compatible Indeterminado}$.

Los tres planos se cortan en una recta.

3. ■ Si $m = 1$: El sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3 - 3\lambda \\ y = 6 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Si $m = 2$:

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 4x + 3y - 3z = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3/2 \\ y = -3/4 \\ z = -3/4 \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos). Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$$

Determina los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma que cumpla que el determinante de la matriz B sea igual a 8, y además se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$
(Castilla La Mancha (junio 2010))

Solución:

$$\begin{aligned} |B| &= 2c - ba + 3b - 2a + 6 = 8 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} b+6 = 4 \implies b = -2 \\ b+2 = 2b+4 \implies b = -2 \\ 2a-6+c = a-1 \implies a+c = 5 \\ c = b+2+c \implies b = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} b = -2 \\ a+c = 5 \\ 2c-ba+3b-2a = 2 \end{cases} &\implies \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Problema 3 (2 puntos). Sea $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$ Halla los valores de las variables x e y para que se cumpla que $A^2 = A$.
(Cataluña (junio 2010))

Solución:

$$\begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 6 & 3x + 3y \\ -2x - 2y & -6 + y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6 = x \\ 3x + 3y = 3 \\ -2x - 2y = -2 \\ -6 + y^2 = y \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2 & y = 3 \\ x = 3 & y = -2 \end{cases}$$

Problema 4 (2 puntos). Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calcule $A^T \cdot B - A \cdot B^T$
2. Resuelva la ecuación matricial $AX + BA = B$

(Andalucía (junio 2010))

Solución:

$$1. A^T \cdot B - A \cdot B^T = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2. AX + BA = B \implies X = A^{-1}(B - BA) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -23 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$