

**Problema 1** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular

1. Los valores de  $a$  para los que la matriz  $A$  es inversible.
2. Calcular la inversa de  $A$  para  $a = 2$  y para  $a = -1$ , si es posible.

**Solución:**

1.

$$|A| = a(a+1) = 0 \implies a = 0, a = -1$$

$$\text{Si } a = 0 \text{ o } a = -1 \implies |A| = 0 \implies \text{no existe } A^{-1}.$$

$$\text{Si } a \neq 0 \text{ y } a \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{si existe } A^{-1}.$$

2. Si  $a = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & -1/6 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -4/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Si  $a = -1$  no puede tener inversa.

**Problema 2** Resolver la ecuación matricial  $AX - B = I - CX$ . Donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$AX + CX = B + I \implies X = (A + C)^{-1}(B + I)$$

$$B + I = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A + C)^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (A + C)^{-1}(B + I) = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1/2 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

**Problema 3** Calcular los valores de  $x$  para los que

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 \end{bmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & -x & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ -x & 0 & -1 \\ -1 & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1-x & x & 0 \\ -1 & x & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1-x & x \\ -1 & x \end{vmatrix} = x(2-x) = 0 \implies x = 0, \quad x = 2$$

**Problema 4** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & a \\ a & -1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de  $A$  para los diferentes valores de  $a$ .

**Solución:**

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 \\ a & -1 & a \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a(2a-2) = 0 \implies a = 0, \quad a = 1$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 & a \\ a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 3a + 2 = 0 \implies a = 1, \quad a = 2$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2a & 0 & a \\ a & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a(1-a) = 0 \implies a = 0, \quad a = 1$$

Si  $a = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la primera y la última fila son iguales, y el menor  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 1 \implies$   
 $\text{Rango}(A) = 2$ . Por el contrario si  $a \neq 1 \implies \text{Rango}(A) = 3$ .