

Problema 1 (5 puntos). Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m :

$$\begin{cases} mx - y + mz = 2 \\ 2x - y - z = m + 1 \\ 4x - my - 5z = 2 \end{cases}$$

y resuélvelo para $m = 1$ y $m = 0$.

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & m & 2 \\ 2 & -1 & -1 & m+1 \\ 4 & -m & -5 & 2 \end{array} \right), \quad |A| = -3m^2 + 9m - 6 = 0 \implies m = 1, \quad m = 2$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Determinado.

Los tres planos se cortan en un punto.

Si $m = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -5 & 2 \end{array} \right)$$

En este caso $\text{Rango}(A) = 2$ y como $\left| \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \end{array} \right| = 30 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \implies$ Sistema Incompatible.

Los tres planos se cortan dos a dos.

2. Si $m = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -5 & 2 \end{array} \right)$$

En este caso $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) < \text{n}^\circ$ de incógnitas y es un Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

Los tres planos se cortan en una recta.

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

3. Si $m = 0$:

$$\begin{cases} -y = 2 \\ 2x - y - z = 1 \\ 4x - 5z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -7/6 \\ y = -2 \\ z = -4/3 \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos). En un refugio de montaña se encuentran tres montañeros para pasar la noche (Mario, Tomás y David). Después de hablar sobre sus vidas, resulta que todos ellos, habían estudiado en el colegio Villaeuropa de Móstoles.

David les dice a sus compañeros, que hace 7 años la suma de sus edades es de 54 de años. Mario les recuerda que en el momento actual su edad es 15 años menor que la suma de los otros dos. Por último, Tomás les informa que, cuando David tenga la edad de Mario, él tendrá 35 años.

Solución:

Sea x la edad de Mario, y la edad de Tomás y z la edad de David.

$$\begin{cases} x + y + z - 21 = 54 \\ x = y + z - 15 \\ x + y - z = 35 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 75 \\ x - y - z = -15 \\ x + y - z = 35 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 30 \\ y = 25 \\ z = 20 \end{cases}$$

Problema 3 (2 puntos). Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$

(Madrid (junio 2007))

Solución:

$$\begin{aligned} XAX^{-1} = B &\implies XA = BX \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8a - 9c & 8b - 9d \\ 6a - 7c & 6b - 7d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2a = 8a - 9c \\ -b = 8b - 9d \\ 2c = 6a - 7c \\ -d = 6b - 7d \end{cases} \implies \begin{cases} c = (2a)/3 \\ d = b \\ 2a = 3c \\ d = b \end{cases} \\ X &= \begin{pmatrix} a & b \\ (2a)/3 & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$