

Problema 1 Tres nadadores de diferentes edades se encuentran en la piscina y el entrenador les comenta que hace cinco años el mayor de ellos tenía el doble de la edad de los otros dos juntos y que dentro de cinco años tendrá la suma de sus edades. El mediano le dice al pequeño que le saca dos años. Calcular las edades de los tres.

Solución:

Sea x los años del pequeño, sea y los años del mediano y sea z los años del mayor.

Hace 5 años: El pequeño tiene $x - 5$ años, el mediano tiene $y - 5$ años y el mayor $z - 5$ años.

Dentro de 5 años: El pequeño tiene $x + 5$ años, el mediano tiene $y + 5$ años y el mayor $z + 5$ años.

$$\begin{cases} 2(x + y - 10) = z - 5 \\ x + y + 10 = z + 5 \\ y = x + 2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + 2y - z = 15 \\ x + y - z = -5 \\ -x + y = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 9 \\ y = 11 \\ z = 25 \end{cases}$$

Problema 2 Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1 \\ (2 - 2m)x + (2m - 2)z = m - 1 \end{cases}$$

- Discutirlo para los distintos valores de m .
- Resuelve los casos compatibles.
- En cada uno de los casos del primer apartado, dé una interpretación geométrica del sistema.

Solución:

a)

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1 \\ (2 - 2m)x + (2m - 2)z = m - 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2-2m & 0 & 2m-2 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2-2m & 0 & 2m-2 & m-1 \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2-2m & 0 & 2m-2 \end{vmatrix} = 4 - 4m$$

$$4 - 4m = 0 \implies m = 1$$

- Cuando $m \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango} A = \text{Rango} \bar{A} = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.
- Cuando $m = 1 \implies |A| = 0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ tenemos que $\text{Rango}(A) = 2$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

En conclusión, cuando $m = 1 \implies \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) = 2 < \text{n}^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema es Compatible Indeterminado (infinitas soluciones).

b) Calculamos las soluciones:

- Cuando $m = 1$:

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2 - z \\ -2x + y = -1 - z \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3/2 \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Cuando $m \neq 1$:

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1 \\ (2-2m)x + -(2-2m)z = -(1-m) \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1 \\ 2x - 2z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3/2 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

- c)
- Cuando $m \neq 1$ y $m \neq -1 \implies$ los tres planos se cortan en un punto
 - Cuando $m = 1 \implies$ dos planos coinciden y el otro les corta en una recta.

Problema 3 Utilizando las propiedades de los determinantes resolver las siguientes ecuaciones:

a)

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0 \implies x = 0, x = -3$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \implies x = \pm 1$$