

Problema 1 Halla tres números sabiendo que el primero menos el segundo es igual a un quinto del tercero, si al doble del primero le restamos seis nos queda la suma del segundo y el tercero y, además, el triple del segundo menos el doble del tercero es igual al primero menos 8.

Solución:

Sea x el primer número, sea y el segundo número y sea z el tercer número.

$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{5}z \\ 2x - 6 = y + z \\ 3y - 2z = x - 8 \end{cases} \implies \begin{cases} 5x - 5y - z = 0 \\ 2x - y - z = 6 \\ -x + 3y - 2z = -8 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 22 \\ y = 18 \\ z = 20 \end{cases}$$

Problema 2 Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m-1)x - y + mz = 1 \\ (m+1)x + y - z = 0 \\ x + 3y - 5z = -m \end{cases}$$

- Discutirlo para los distintos valores de m .
- Resolverlo para el caso en el que tenga infinitas soluciones.
- En cada uno de los casos del primer apartado, dé una interpretación geométrica del sistema.

Solución:

a)

$$\begin{cases} (m-1)x - y + mz = 1 \\ (m+1)x + y - z = 0 \\ x + 3y - 5z = -m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & -1 & m \\ m+1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m-1 & -1 & m & 1 \\ m+1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & -m \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m-1 & -1 & m \\ m+1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 3m^2 - 5m - 2$$

$$3m^2 - 5m - 2 = 0 \implies \begin{cases} m = 2 \\ m = -1/3 \end{cases}$$

- Cuando $m \neq 2$ y $m \neq -1/3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango } A = \text{Rango } \bar{A} = 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$, luego en este caso el sistema es compatible determinado.
- Cuando $m = -1/3 \implies |A| = 0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ tenemos que $\text{Rango}(A) = 2$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -4/3 & -1 & -1/3 & 1 \\ 2/3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & -1/3 \end{array} \right)$$

$$\text{El menor } \begin{vmatrix} -1 & -1/3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & -1/3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

En conclusión, cuando $m = -1/3 \implies \text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\bar{A}) = 3$, luego en este caso el sistema es incompatible.

- Cuando $m = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & -2 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ tenemos que $\text{Rango}(A) = 2$ Calculamos los menores de orden 3 de $\bar{A}$:

$$|A_1| = |A| = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_4| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ tenemos que $\text{Rango}(\bar{A}) = 2$ En conclusión, cuando $m = 2 \implies \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) = 2 < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)}$.

b) Resolvemos para $m = 2$:

$$\begin{cases} x- & y+ & 2z = & 1 \\ 3x+ & y- & z = & 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x- & y+ & = & 1-2z \\ 3x+ & y = & & z \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\lambda \\ y = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- c)
- Cuando $m \neq 2$ y $m \neq -1/3 \implies$ los tres planos se cortan en un punto
 - Cuando $m = 2 \implies$ los tres planos se cortan en una recta.
 - Cuando $m = -1/3 \implies$ los tres planos se cortan dos a dos sin tener puntos comunes a los tres.

Problema 3 Sea una A una matriz $m \times n$

- a) ¿Existe una matriz B tal que $B \cdot A$ sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?
- b) ¿Se puede encontrar una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?

- c) Busca una matriz B tal que $B \cdot A = (0 \ 0)$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

Problema mal diseñado, cuando se habla de orden de una matriz nos referimos a matrices cuadradas.

- a) $\begin{matrix} B & \cdot & A \\ 1 \times m & & m \times n \end{matrix} \implies B$ tiene que tener de dimensión $1 \times m$, como tiene que ser una matriz cuadrada porque el problema habla de orden, la única posibilidad es que sean ambas matrices de orden uno.
- b) $\begin{matrix} A & \cdot & B \\ m \times n & & n \times p \end{matrix} \implies B$ Sólo es posible si $m = 1$ Por el mismo pensamiento del apartado anterior, estaríamos ante una matriz de orden uno.
- c)

$$B \cdot A = B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ 0) \implies (a \ b \ c) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ 0) \implies$$

$$a = b = 0 \text{ y } c \text{ cualquiera} \implies B = (0 \ 0 \ c)$$