

**Problema 1** Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & z = & 3 \\ & (1+a)y+ & z = & 4 \\ x+ & 2y+ & az = & 4 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema para los diferentes valores de  $a$  e interpretarlo geométricamente.
- b) Resolver el sistema para  $a = 2$ .

Castilla-León (Junio 2006)

**Solución:**

a)

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1+a & 1 & 4 \\ 1 & 2 & a & 4 \end{array} \right), \quad |A| = a^2 - 1 = 0 \quad a = \pm 1$$

Si  $a \neq \pm 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$  y el sistema es Compatible Determinado.

Si  $a = 1$ :

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Como  $|A| = 0$  y  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$ .

Como

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego  $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \implies \text{Sistema Incompatible}$ .

Si  $a = -1$ :

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right)$$

Como  $|A| = 0$  y  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2.$

Como

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Luego  $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies \text{Sistema Incompatible}.$

b) Si  $a = 2$

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & z = & 3 \\ & 3y+ & z = & 4 \\ x+ & 2y+ & 2z = & 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

**Problema 2** Una mujer ha obtenido 4500 euros de beneficio por invertir un total de 60000 euros en tres empresas:  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . Se sabe que el dinero invertido en la empresa  $\alpha$  fué  $M$  veces la suma de las cantidades invertidas en las empresas  $\beta$  y  $\gamma$ , y que los beneficios de la inversión fueron del 5 % en la empresa  $\alpha$ , 10 % en la empresa  $\beta$  y 20 % en la empresa  $\gamma$

- Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita calcular la inversión realizada por la mujer en cada empresa.
- Prueba que para  $M > 0$  el sistema es compatible determinado
- Calcula la solución para  $M = 2$ .

Cantabria (Junio 2006)

**Solución:**

$x$  euros invertidos en la empresa  $\alpha$

$y$  euros invertidos en la empresa  $\beta$

$z$  euros invertidos en la empresa  $\gamma$ .

a)

$$\begin{cases} x + y + z = 60000 \\ x = M(y + z) \\ 0,05x + 0,1y + 0,2z = 4500 \end{cases} \implies \begin{cases} x + & y + & z = & 60000 \\ x - & My - & Mz = & 0 \\ x + & 2y + & 4z = & 90000 \end{cases}$$

b)

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60000 \\ 1 & -M & -M & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 90000 \end{array} \right) \implies |A| = -2M - 2 = 0 \implies M = -1$$

Si  $M \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$  y el sistema es Compatible Determinado.

Si  $M = -1$ :

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} x+ & y+ & z = & 60000 \\ x+ & y+ & z = & 0 \\ x+ & 2y+ & 4z = & 90000 \end{array} \right)$$

Como  $|A| = 0$  y  $\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$ .

Como

$$|A_2| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 60000 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 90000 \end{array} \right| = 60000 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego  $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \implies$  Sistema Incompatible. Y por tanto, cuando  $M > 0$  el sistema será Compatible Determinado.

c) Si  $M = 2$  el sistema queda:

$$\begin{cases} x+ & y+ & z = & 60000 \\ x- & 2y- & 2z = & 0 \\ x+ & 2y+ & 4z = & 90000 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 40000 \\ y = 15000 \\ z = 5000 \end{cases}$$

**Problema 3** Hállense las matrices  $A$  cuadradas de orden dos, que verifican la igualdad

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

Castilla-León (Junio 2006)

**Solución:**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b = a \\ b = b \\ c+d = a+c \\ d = b+d \end{cases} \implies \begin{cases} b = 0 \\ a = d \end{cases} \implies \begin{pmatrix} d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$