

Problema 1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + my - z = 1 \\ -x + my + 2z = -2 \\ mx + 2y + z = -m \end{cases}$$

1. Discutir el sistema para los diferentes valores de m e interpretarlo geométicamente.
2. Resolver el sistema cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & m & -1 & 1 \\ -1 & m & 2 & -2 \\ m & 2 & 1 & -m \end{array} \right), \quad |A| = 3(m^2 + m - 2) = 0 \quad m = 1, \quad m = -2$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado. Los tres planos se cortan en un punto, el sistema tiene solución única.

Si $m = -2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

Como

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Luego $\text{Rango}(\bar{A}) \neq \text{Rango}(A) \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución) En este caso los tres planos se cortan dos a dos, pero sin soluciones comunes.

$$\begin{aligned} \pi_1 \text{ con } \pi_2 : \frac{2}{-1} &\neq \frac{-2}{-2} \implies \text{Se cortan} \\ \pi_1 \text{ con } \pi_3 : \frac{2}{-2} &\neq \frac{-2}{2} \implies \text{Se cortan} \\ \pi_2 \text{ con } \pi_3 : \frac{-1}{-2} &\neq \frac{-2}{2} \implies \text{Se cortan} \end{aligned}$$

$m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

Se observa que la tercera fila $F_3 = F_2 + F_1$, luego $\text{Rango}(A) = 2$, $\text{Rango}(\overline{A}) < n^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado. Tiene infinitas soluciones y los tres planos se cortan en una recta.

2. Si $m = 1$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -x + y + 2z = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 2 & 2 \\ m & -1 & 1 \\ 2 & m & 3 \end{pmatrix}$ Calcular los valores que

debe tomar el parámetro m de manera que A sea inversible. Calcular, si es posible, la inversa de esta matriz para $m = 0$.

Solución:

$$|A| = m^2 - 9m + 8 = 0 \implies m = 1, m = 8.$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 8 \implies |A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}$

Si $m = 1$ o $m = 8 \implies |A| = 0 \implies$ no existe A^{-1}

Si $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/8 & -3/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Hállense las matrices A cuadradas de orden dos, que verifican la igualdad

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b=a \\ b=b \\ c+d=a+c \\ d=b+d \end{cases} \implies \begin{cases} b=0 \\ a=d \end{cases} \implies \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$$

Problema 4 Resolver la ecuación matricial

$$AX - I = BX - C$$

donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$AX - I = BX - C \implies X = (A - B)^{-1}(I - C)$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -1/5 & -3/5 \end{pmatrix}; \quad I - C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -1/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$