

Problema 1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx - y + z = m \\ 2x + my + z = 2 \\ x + 2y = m \end{cases}$$

- Discutir el sistema para los diferentes valores de m e interpretarlo geométicamente.
- Resolver el sistema cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & 2 & m \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & m \end{array} \right), \quad |A| = 6 - 6m = 0 \quad a = 1$$

Si $m \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$ y el sistema es Compatible Determinado. Los tres planos se cortan en un punto, el sistema tiene solución única.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

Se observa que la tercera fila $F_3 = F_2 - F_1$, luego $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies$ Sistema Compatible Indeterminado. Tiene infinitas soluciones y los tres planos se cortan en una recta.

b) Si $m = 1$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3}\lambda \\ y = \frac{1}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 2 & -m \\ 3 & m & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ Calcular los valores que debe tomar el parámetro m de manera que A sea inversible. Calcular, si es posible, la inversa de esta matriz para $m = 0$.

Solución:

$$\|A\| = 5(m^2 - 5m + 4) = 0 \implies m = 1, m = 4.$$

$$\text{Si } m \neq 1 \text{ y } m \neq 4 \implies \|A\| \neq 0 \implies \exists A^{-1}$$

$$\text{Si } m = 1 \text{ o } m = 4 \implies \|A\| = 0 \implies \text{no existe } A^{-1}$$

Si $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/5 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & -3/10 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Hállense las matrices A cuadradas de orden dos, que verifican la igualdad

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} c & d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a+b \\ d & c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c = b \\ d = a+b \\ c+c = d \\ b+d = c+d \end{cases} \implies \begin{cases} c = b \\ d = a+c \end{cases} \implies \begin{pmatrix} a & c \\ c & a+c \end{pmatrix}$$

Problema 4 Resolver la ecuación matricial

$$A^2X - I = B^2X - C$$

$$\text{donde } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$A^2X - I = B^2X - C \implies X = (A^2 - B^2)^{-1}(I - C)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \implies A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A^2 - B^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}; \quad I - C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$