

Problema 1 Se pide:

- a) Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ cumple que $A^3 = -A - I$ y calcular la matriz inversa de A .
- b) Si A es cualquier matriz con n filas y n columnas tal que $A^3 = -A - I$ y se sabe que $|A| = m$, calcular el valor del determinante de $A + I$ en función de m , donde I representa a la matriz identidad.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} A^3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ -A - I &= -\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego $A^3 = -A - I$

b)

$$A^3 = -A - I \implies A + I = -A^3 \implies |A + I| = -|A^3| = -|A|^3 = -m^3$$

Problema 2 Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} mx + y - mz = 2 \\ (m-3)x + \quad + mz = 1 \\ -x + my = 3 \end{cases}$$

- a) Discutirlo para los distintos valores de m .
- b) Resolverlo para el caso en el que tenga infinitas soluciones.
- c) En cada uno de los casos del primer apartado, dé una interpretación geométrica del sistema.

Solución:

a)

$$\begin{cases} mx + y - mz = 2 \\ (m-3)x + \quad + mz = 1 \\ -x + my \quad = 3 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -m & 2 \\ m-3 & 0 & m & 1 \\ -1 & m & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -m \\ m-3 & 0 & m \\ -1 & m & 0 \end{vmatrix} = -2m^3 + 3m^2 - m$$

$$2m^3 + 3m^2 - m = 0 \implies \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = 1/2 \end{cases}$$

- Cuando $m \neq 0$ y $m \neq 1$ y $m \neq 1/2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango } A = \text{Rango } \overline{A} = 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.
- Cuando $m = 1/2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 1 & -1/2 & 2 \\ -5/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} 1/2 & 1 \\ -5/2 & 0 \end{vmatrix} = 5/2 \neq 0$ tenemos que $\text{Rango}(A) = 2$

$$\text{El menor } \begin{vmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

En conclusión, cuando $m = 1/2 \implies \text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\overline{A}) = 3$, luego en este caso el sistema es incompatible.

- Cuando $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ tenemos que $\text{Rango}(A) = 2$ Como el menor

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

En conclusión, cuando $m = 0 \implies \text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\bar{A}) = 3$, luego en este caso el sistema es incompatible.

- Cuando $m = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Se observa claramente que, la tercera fila es la suma de las otras dos y además el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ tenemos que $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) < n^\circ$ de incógnitas, luego el sistema es Compatible Indeterminado (Tiene infinitas soluciones).

b) Resolvemos para $m = 1$:

$$\begin{cases} x+ & y- & z = & 2 \\ -2x+ & & + & z = & 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x- & y+ & = & 1-2z \\ 3x+ & y = & & z \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- c)
- Cuando $m \neq 0$ y $m \neq 1$ y $m \neq 1/2 \implies$ los tres planos se cortan en un punto
 - Cuando $m = 1/2 \implies$ los tres planos se cortan dos a dos sin tener puntos comunes a los tres.
 - Cuando $m = 0 \implies$ Dos planos son paralelos y el tercero les corta.
 - Cuando $m = 1 \implies$ los tres planos se cortan en una recta.

Problema 3 Resuelve la ecuación matricial $AX - B + C = 0$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X = A^{-1}(B - C)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B - C = B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 & 0 \\ 11 & 1 & -14 & 2 \end{pmatrix}$$