

Problema 1 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax - y - z = a \\ 2x + y + az = -3a \\ -ax + y - az = -a \end{cases}$$

1. Discutir el sistema para los diferentes valores de a .
2. Resolver el sistema para los valores de a que hacen que el sistema tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & a \\ 2 & 1 & a & -3a \\ -a & 1 & -a & -a \end{array} \right)$$

$$|A| = -a^2 - 3a - 2 = 0 \implies a = -1, a = -2$$

Si $a \neq -1$ o $a \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

Si $a = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

En este caso tenemos que $\text{Rango}(A) = \text{rango}(\bar{A}) = 2 < n^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones).

Si $a = -2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right), \quad A = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

En este caso tenemos que $\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(\bar{A}) = 3 < \text{Sistema incompatible (no tiene solución)}$.

2. Cuando $a = -1$ podemos despreciar la primera ecuación y nos queda el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + y = 3 + z \\ x + y = 1 - z \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX - I = BX + C$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - BX = C + I \implies X = (A - B)^{-1}(C + I)$$

$$C + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - B)^{-1}(C + I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Para la elaboración de un pienso para vacas hay que mezclar tres productos A , B y C . El A se vende a 12 euros el kg., el B a 12 euros el kg. y el C a 18 euros el kg. Para que la alimentación sea correcta la mezcla debe llevar del pienso A el doble que entre el B y C juntos. Un cliente pide que le preparen pienso por un valor de 6000 euros con la condición de que se ponga la misma cantidad de A que de B . Se pide calcular la cantidad que debe mezclar de cada producto.

Solución:

$$\begin{cases} 6x + 12y + 18z = 6000 \\ x = 2(y + z) \\ y = z \end{cases} \implies \begin{cases} x + 2y + 3z = 1000 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4000/9 \\ y = 1000/9 \\ z = 1000/9 \end{cases}$$