

En este examen puedes escoger los tres problemas que quieras, pero debes de tener en cuenta la puntuación de cada uno de ellos.

Problema 1 (4 puntos) Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\begin{cases} ax + y + z = 2 \\ x + y + az = 2 \\ -ax \quad \quad -z = -a \end{cases}$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -a & 0 & -1 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ -a & 0 & -1 & -a \end{array} \right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -a & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = 0 \implies a = \pm 1$$

- Si $a \neq \pm 1 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ Sistema compatible determinado.

- Para $a = -1$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$

Tenemos que $|A| = 0$ y además hay un menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

y por tanto, el $\text{Rango}(A) = 2$.

Ahora estudiamos el rango de $\bar{A}$, y nos damos cuenta de que hay un menor de orden 3 y distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ y el } \text{Rango}(\bar{A}) = 3.$$

Concluyendo:

$\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \implies$ El sistema es Incompatible.

• Para $a = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right)$

Sabemos que $|A| = 0$, luego tenemos que buscar menores, y encontramos el siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2.$$

En la matriz ampliada $\bar{A}$ vemos que tiene dos filas iguales, y por tanto, no puede tener rango tres. Buscando menores de orden dos y nos encontramos con el mismo de la matriz A .

Como conclusión podemos afirmar que $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}\bar{A} < n^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado

Vamos a resolverlo:

Por el menor de orden dos que estudiamos en la matriz A podemos despreciar la primera de las ecuaciones, pues sería combinación lineal de las dos primeras. Y nos quedaría el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x - z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 2 - z \\ x = 1 - z \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos) Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Halla los valores de k para los que la matriz $A \cdot B$ tiene inversa.
2. Halla los valores de k para los que la matriz $B \cdot A$ tiene inversa.

Solución

1. Primero calculamos el producto de $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el determinante:

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 3k - (-k + k(-2+2k)) = 0$$

Independientemente del valor de k , luego $A \cdot B$ no tiene inversa, sea cual sea el valor de k .

2. Primero calculamos el producto de $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el determinante:

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 3$$

Esta expresión no se anula nunca, luego siempre existirá inversa de $B \cdot A$, sea cual sea el valor de k .

Problema 3 (3 puntos) Sea M una matriz real cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n . Se pide:

1. Estudiar si existe la matriz inversa de M . En caso afirmativo, expresa M^{-1} en términos de M e I .
2. Expresar M^3 como combinación lineal de M e I .
3. Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Solución:

1. Tenemos $M^2 - 2M = 3I \implies (M - 2I)M = 3I \implies \frac{1}{3}(M - 2I)M = I \implies M^{-1} = \frac{1}{3}(M - 2I)$
2. Tenemos $M^2 - 2M = 3I \implies M^2 = 3I + 2M$
 Por otra parte $M^3 = M^2 \cdot M = (3I + 2M)M = 3I \cdot M + 2M^2$, si
 volvemos a sustituir M^2 nos queda:

$$M^3 = 3I \cdot M + 2(3I + 2M) = 3M + 6I + 4M = 7M + 6I$$

3. Primero calculamos M^2 :

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión:

$$M^2 - 2M = 3I \implies \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 2ab - 2b & a^2 + b^2 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a^2 + b^2 - 2a = 3 \\ 2b(a - 1) = 0 \end{cases}$$

Si $b = 0$ en la segunda ecuación, al sustituir este resultado en la primera obtendremos dos valores de a , que serían los resultados de la ecuación $a^2 - 2a - 3 = 0$, es decir, $a = 3$ y $a = -1$. Las matrices M obtenidas serían:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si $a = 1$ en la segunda ecuación, al sustituir este resultado en la primera obtendremos dos valores de b , que serían los resultados de la ecuación $b^2 = 4$, es decir, $b = 2$ y $b = -2$. Las matrices M obtenidas serían:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (3 puntos) Cuatro colegas llamados Luis, Javier, Enrique y Fermín se juntan en el recreo para intercambiar cromos. Fermín tiene cinco cromos más que Luis y Javier juntos, Enrique tiene el doble de cromos que Javier, y Javier tiene 90 cromos menos que Fermín y Enrique juntos. Calcula los cromos que tienen entre los cuatro.

Solución:

Sea x los cromos de Luis, y los cromos de Javier, z los cromos de Enrique,

y h los cromos de Fermín.

$$\begin{cases} h = 5 + x + y \\ z = 2y \\ y + 90 = h + z \end{cases} \implies \begin{cases} x + y - h = -5 \\ 2y - z = 0 \\ y - z - h = -90 \end{cases}$$

Multiplicamos la 3ª ecuación por -2 y la sumamos a la 2ª nos queda

$$\begin{cases} x + y - h = -5 \\ 2y - z = 0 \\ -2y + 2z + 2h = 180 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y - h = -5 \\ 2y - z = 0 \\ z + 2h = 180 \end{cases}$$

Y si ahora sumamos la primera y la tercera nos queda $x + y + z + h = 175$ que es lo que nos pedía el problema.