

Problema 1 (4 puntos) Discutir según el valor del parámetro real λ el sistema lineal

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ 3x + 4y + \lambda z = \lambda \end{cases}$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda & \lambda \end{array} \right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 5 = 0 \implies \lambda = 5$$

- Si $\lambda \neq 5 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ Sistema compatible determinado.

- Para $\lambda = 5$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \end{array} \right)$

Tenemos que $|A| = 0$ y además hay un menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y por tanto, el $\text{Rango}(A) = 2$.

Ahora estudiamos el rango de $\bar{A}$, y nos damos cuenta de que hay dos columnas iguales, la última y la penúltima, y por tanto, no puede tener rango tres. Buscando menores de orden dos y nos encontramos con el mismo de la matriz A .

Como conclusión podemos afirmar que $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) < n^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado

Vamos a resolverlo:

Por el menor de orden dos que estudiamos en la matriz A podemos despreciar la tercera de las ecuaciones, pues sería combinación lineal de las dos primeras. Y nos quedaría el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x+ & y+ & z = & 1 \\ x+ & 2y+ & 3z = & 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x+ & y = & 1 & -z \\ x+ & 2y = & 3 & -3z \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} x = & -1+ & h \\ y = & 2- & 2h \\ z = & & h \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcular $3A \cdot A^t - 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
2. Resolver la siguiente igualdad matricial:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

1. La matriz $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ por lo que tenemos lo siguiente:

$$3A \cdot A^t - 2I = 3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

2. Tenemos que $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \exists A^{-1}$. El hecho de que A tenga inversa nos permite resolver la ecuación matricial de la siguiente manera:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies$$

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación:

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (3 puntos) Determinar para que valores de x tiene inversa la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{pmatrix}$$

y hallala en función de x

Solución:

- Una matriz tiene inversa si su determinante es distinto de cero, veamos los valores de x que anulan el determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{vmatrix} = -2x^2 = 0 \implies x = 0$$

En conclusión, la matriz A tiene inversa siempre que $x \neq 0$.

- Calculamos A^{-1}

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj \left[\begin{pmatrix} 0 & x & -x \\ 1 & 0 & 0 \\ x & x & x \end{pmatrix} \right]}{-2x^2} = \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 0 & -x & x \\ -2x^2 & x^2 & x^2 \\ 0 & -x & -x \end{pmatrix}}{-2x^2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2x} & -\frac{1}{2x} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2x} & \frac{1}{2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$