

Problema 1 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Resolver la ecuación matricial $XA - B = XC$.
2. Calcular la matriz X

Solución:

$$1. \quad XA - B = XC \implies XA - XC = B \implies X(A - C) = B \implies$$

$$X(A - C)(A - C)^{-1} = B(A - C)^{-1} \implies X = B(A - C)^{-1}.$$

$$2. \quad A - C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = B(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (2 puntos) Determinar para que valores de m tiene inversa la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

y hállala para $m = 2$.

Solución:

Una matriz A tienen inversa siempre que $|A| \neq 0$, luego

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = 3m^2 - 3 = 0 \implies m = 1, \quad m = -1$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de m distinto de 1 y -1 .

Si $m = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/9 & -2/9 & 4/9 \\ 4/3 & 2/3 & -1/3 \\ -8/9 & -1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (2 puntos) Calcule mediante transformaciones elementales (sin emplear la regla de Sarrus) y justificando los pasos, este determinante:

$$\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix} &= [C_1 : C_1+C_2+C_3] = \begin{vmatrix} 2+a+b+c & b & c \\ 2+a+b+c & 2+b & c \\ 2+a+b+c & b & 2+c \end{vmatrix} = \\ &= (2+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & 2+b & c \\ 1 & b & 2+c \end{vmatrix} = [F_2 : F_2-F_1] = (2+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & b & 2+c \end{vmatrix} = \\ &= 2(2+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & 2+c \end{vmatrix} = 4(2+a+b+c) \end{aligned}$$

Problema 4 (2 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y sea n un número natural cualquiera. Determinar el valor de A^n para cada n y halla $A^{350} - A^{250}$.

Solución:

$$\begin{aligned} A^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \cdots A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix} \\ A^{350} - A^{250} &= A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1050 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 750 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{3x}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2x - 1}{x^3 - 1} \right)^{x^2}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^4 - 1}{3x^4 + x + 1} \right)^{3x^4}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{3x+1} - 1}$

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2\sqrt{2+x}}}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2x - 1}{x^3 - 1} \right)^{x^2} = (1^\infty) = e^\lambda = e^2$
 $\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{x^3 + 2x - 1}{x^3 - 1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^3 - 1} = 2$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^4 - 1}{3x^4 + x + 1} \right)^{3x^4} = (1^\infty) = e^\lambda = e^{-\infty} = 0$
 $\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^4 \left(\frac{3x^4 - 1}{3x^4 + x + 1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^5 - 6x^4}{3x^4 + x + 1} = -\infty$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{3x+1} - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}} = \frac{4}{3}$