Problema 1 Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla los valores de x para los cuales la matriz M no es inversible. Hallar la inversa de M para $x = 2$.

Solución:

Para que M tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de cero, hacemos $|M| = 1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = -1$. Es decir, la matriz M tiene inversa siempre que $x \neq -1$ y $x \neq 1$.

Para $x = 2$ tendremos:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \frac{Adj(M^T)}{|M|} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1 & -2/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resuelve si es posible, la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Estamos ante una ecuación matricial de la forma $AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$, esto quiere decir, que podremos encontrar X siempre que exista A^{-1}. Como $|A| = 0$ resulta que A no puede tener inversa y, por tanto, la ecuación matricial no tiene solución.

Problema 3 Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab - a^2 & b^2 - a^2 \\ 2a & a+b-2a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab - a^2 & b^2 - a^2 \\ -a+b & 2b-2a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a(b-a) & (b-a)(b+a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$$

Problema 4 Resolver los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2x}$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-x+1} \right)^{2x}$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^2-x}{2x^2} \right)^{x}$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{3x}{\sqrt{2x+1} - 1}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{2} = -\dfrac{1}{2}$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-x+1} \right)^{2x} = (1^\infty) = e^\lambda$

   $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} 2x \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-x+1} - 1 \right) = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{2x^2}{x^2-x+1} = 2$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^2-x}{2x^2} \right)^{x} = \left(\dfrac{1}{2} \right)^{\infty} = 0$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{3x}{\sqrt{2x+1} - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{3}{\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}} = 3$