

Problema 1 (4 puntos) Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x - ay + z = 1 \\ 3x - y + z = a \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -a & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A :

$$\begin{vmatrix} 3 & -a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5a - 5 = 0 \implies a = 1$$

- Si $a \neq 1 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) \implies$ Sistema compatible determinado.

- Para $a = 1$: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$

Observamos que la primera y la segunda fila son iguales y además hay

un menor $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ y por tanto, el $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) \implies$

Sistema Compatible Indeterminado.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\lambda \\ y = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ k & 1 & k \\ 0 & -k & -1 \end{pmatrix}$$

1. Halla los valores de k para los que la matriz A tiene inversa.
2. Calcular A^{-1} para $k = 1$.

Solución

1. Calculamos $|A| = 2k^2 - k - 3 = 0 \implies k = \frac{3}{2}, k = -1$. Luego A tendrá inversa siempre que k distinto de cualquiera de los valores anteriores.
2. Sustituimos $k = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \\ 1/2 & -3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (3 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolver la ecuación matricial $AX - A = B - C$.

Solución:

$$AX - A = B - C \implies A(X - I) = B - C \implies X - I = A^{-1}(B - C) \implies \\ X = A^{-1}(B - C) + I$$

Tenemos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$