

Problema 1 (2 puntos) Discute si el sistema siguiente es compatible, y en caso afirmativo encuentra las soluciones.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ 7x - 3y + z = 5 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ 7x - 3y + z = 5 \end{cases} & \xrightarrow{(E_2 \rightarrow E_1)} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 7x - 3y + z = 5 \end{cases} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (E_2 - 3E_1) \\ (E_3 - 7E_1) \end{smallmatrix}} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 7x - 3y + z = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -5y + 4z = -1 \\ -10y + 8z = -2 \end{cases} & \xrightarrow{(E_3 - 2E_2)} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -5y + 4z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \implies \end{aligned}$$

El sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

Vamos a calcularlas:

Despejando y en E_2 y haciendo $z = \lambda$

$$y = \frac{-1 - 4z}{-5} = \frac{1 + 4z}{5} = \frac{1 + 4\lambda}{5}$$

Sustituyendo estos valores en E_1

$$x + \frac{1 + 4\lambda}{5} - \lambda = 1 \implies x = \frac{\lambda + 1}{5}$$

La solución pedida sería:

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda + 1}{5} \\ y = \frac{4\lambda + 1}{5} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula si es posible:

1. $A \cdot B$
2. $B \cdot A$

3. $A \cdot C$

4. $C \cdot A$

5. $B \cdot C$

6. $C \cdot B$

Solución:

1. $A \cdot B$ 2×2 y 2×3 , luego la matriz resultante será de dimensión 2×3 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 14 \\ -8 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

2. $B \cdot A$ 2×3 y 2×2 , luego no se pueden multiplicar.

3. $A \cdot C$ 2×2 y 3×2 , luego no se pueden multiplicar.

4. $C \cdot A$ 3×2 y 2×2 , luego la matriz resultante será de dimensión 3×2 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -12 & 2 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$$

5. $B \cdot C$ 2×3 y 3×2 , luego la matriz resultante será de dimensión 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

6. $C \cdot B$ 3×2 y 2×3 , luego la matriz resultante será de dimensión 3×3 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 14 \\ -6 & -2 & -4 \\ 9 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (3 puntos) Encuentra la matriz inversa, si existe, de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

- Estudio de la matriz A :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

Luego la matriz A tiene inversa

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right)}{7} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{7} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

- La matriz B no puede tener inversa al no ser una matriz cuadrada.
- Estudio de la matriz C :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Luego la matriz C no tiene inversa.

- Estudio de la matriz D :

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -80$$

Luego la matriz D tiene inversa

$$\begin{aligned} D^{-1} &= \frac{Adj(D^T)}{|D|} = \frac{Adj\left(\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right)}{-80} = \frac{\begin{pmatrix} 17 & -9 & 6 \\ -4 & -12 & 8 \\ -7 & -1 & -26 \end{pmatrix}}{-80} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{17}{80} & \frac{9}{80} & -\frac{3}{40} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{1}{13} \\ \frac{7}{80} & \frac{1}{80} & \frac{13}{40} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Problema 4 (2 puntos) Calcular el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como $|A| = 0$ tendremos que $Rango(A) < 3$. Buscamos entre los menores

y encontramos que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies Rango(A) = 2$