

Problema 1 (4 puntos) Estudia, según los valores de m , y resuelve cuando sea posible el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + my + 3z = 3 \\ y - 6z = 0 \\ 3y - z = 2 \end{cases}$$

Solución

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & m & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

El rango de A no puede cuatro, ya que sólo hay tres incógnitas. Entre los menores encontramos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 17 \neq 0$$

Luego $\text{Rango}(A) = 3$, independientemente del valor de m .

Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$; vamos a calcular el determinante de $\overline{A}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & m & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = [F_2 - F_1] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & m-2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -12m + 58 = 0$$

$$\implies m = \frac{29}{6}$$

Si $m \neq \frac{29}{6} \implies \text{Rango}(A) = 3 \neq \text{Rango}(\overline{A}) = 4$ en este caso se trata de un Sistema Incompatible.

Si $m = \frac{29}{6} \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas, luego el sistema es Compatible Determinado y, por tanto, tiene solución única.

Por el menor elegido en A , podemos eliminar la segunda ecuación

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & 3z = & 1 \\ & y- & 6z = & 0 \\ & 3y- & z = & 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{17} \\ y = \frac{12}{17} \\ z = \frac{2}{17} \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos)

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Averiguar si existe algún valor de a de forma que $A^2 - 3A = -2I$ siendo I la matriz identidad.

2. Sea A cualquier matriz cuadrada tal que $A^2 - 3A = -2I$. Probar que A tiene inversa utilizando la ecuación dada para expresar A^{-1} en función de A .

Solución:

1.

$$\begin{aligned} A^2 - 3A &= \begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix} = \\ &= -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2I \end{aligned}$$

Operando:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 49 - 15a & 7a + a^2 - 12 & -12 - 3a \\ 21 - 6a & 3a + a^2 - 6 & -3 - 3a \\ 6 + 6a & 3a^2 + 2a - 10 & 19 - 18a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 3a & -18 \\ 9 & 3a & -9 \\ 9a & 6 & -15 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 28-15a & a^2+4a-12 & 6-3a \\ 12-6a & a^2-6 & 6-3a \\ 6-3a & 3a^2+2a-16 & 34-18a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Si igualamos todos los términos tenemos que en todas las condiciones se cumple:

$$28 - 15a = -2 \implies a = 2$$

2.

$$A^2 - 3A = -2I \implies (A - 3I)A = -2I \implies -\frac{1}{2}(A - 3I)A = I \implies A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3I)$$

Es fácil comprobar que la multiplicación de A^{-1} por el otro lado cumple la propiedad de inversa:

$$A(-\frac{1}{2}(A - 3I)) = -\frac{1}{2}A(A - 3I) = -\frac{1}{2}(A^2 - 3A) = I$$

Problema 3 (3 puntos) Sea A una matriz $m \times n$

1. ¿Existe una matriz B tal que BA sea una matriz fila?. Si existe, ¿qué orden tiene?.
2. ¿Se puede encontrar una matriz B tal que AB sea una matriz fila?. Si existe, ¿qué orden tiene?.

3. Busca una matriz B tal que $BA = (0 \ 0)$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

1. Para que B se pueda multiplicar por A tiene que tener por dimensión $p \times n$, y en el caso de que $p = 1$ la matriz resultante BA tendrá de dimensión $1 \times m$, que sería una matriz fila.
2. Para que B se pueda multiplicar por A tiene que tener por dimensión $m \times p$, y en el caso de que $p = 1$ la matriz resultante AB tendrá de dimensión $m \times 1$, que sería una matriz columna, está claro que no es posible para ningún valor que demos a p , un resultado de matriz fila.
3. Para que $BA = (0, 0)$ es necesario que B tenga de dimensión 1×3 , $B = (a \ b \ c)$ y tenemos:

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (a \ a+b) = (0 \ 0) \implies a = 0, \ b = 0$$

c puede ser cualquier valor por lo que la matriz $B = (0 \ 0 \ c)$.