Problema 1 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcular $3A \cdot A^t - 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
2. Resolver la siguiente igualdad matricial:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

1. La matriz $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ por lo que tenemos lo siguiente:

$$3A \cdot A^t - 2I = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

2. Tenemos que $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$. El hecho de que A tenga inversa nos permite resolver la ecuación matricial de la siguiente manera:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación:

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Determinar para que valores de x tiene inversa la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{pmatrix}$$

y hallala en función de x

Solución:

- Una matriz tiene inversa si su determinante es distinto de cero, veamos los valores de x que anulan el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{vmatrix} = -2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

  En conclusión, la matriz A tiene inversa siempre que $x \neq 0$.

- Calculamos A^{-1}

$$A^{-1} = A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj\left[\begin{pmatrix} 0 & x & -x \\ 1 & 0 & 0 \\ x & x & x \end{pmatrix}\right]}{-2x^2} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 0 & -x & x \\ -2x^2 & x^2 & x^2 \\ 0 & -x & -x \end{pmatrix}}{-2x^2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2x} & -\frac{1}{2x} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2x} & \frac{1}{2x} \end{pmatrix}$$

Problema 3 Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & a+b-2a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ -a+b & 2b-2a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a(b-a) & (b-a)(b+a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$$

Problema 4 Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Es una matriz de dimensión 3×4 esto quiere decir que, el rango de la matriz como mucho será 3. Consideramos ahora las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & a+4 & -4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & a+4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus determinantes:
$|A_1| = -(a+4)(a-2) = 0 \Longrightarrow \ a = -4 \ a = 2$
$|A_2| = 8(a+4) = 0 \Longrightarrow \ a = -4$
$|A_3| = 12a + 48 = 0 \Longrightarrow \ a = -4$
$|A_4| = (a+4)(3a+2) = 0 \Longrightarrow \ a = -4 \ a = -\frac{2}{3}$ El único valor de a que anula todos los determinantes es $a = -4$. Además tenemos que $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.
Por tanto podemos concluir de la siguiente manera:
Si $a = -4$ el rango de A es 2
Si $a \neq -4$ el rango de A es 3