

1	Determinar las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de las rectas que pasan por el punto A y con el vector de dirección dado: a) A(2, 1, -3) $\vec{u} = (-1, 2, -2)$ b) B(0, 0, 0), $\vec{v} = (2, -1, -3)$
----------	---

SOLUCIÓN:

$$a) r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases} \quad r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2}$$

$$b) s \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = -3t \end{cases} \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-3}$$

2	Escribe en forma paramétricas las rectas: a) $r \equiv \frac{x-1}{3} = y = \frac{2-z}{2}$ b) $s \equiv x = y = z$
----------	---

SOLUCIÓN:

$$a) r \equiv \frac{x-1}{3} = y = \frac{2-z}{2} \rightarrow r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-2} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

$$b) s \equiv x = y = z \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

3	Determinar dos puntos pertenecientes a las rectas: a) $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{2-3y}{3} = 1-z$ b) $s \equiv \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -3z + 2 \end{cases}$
----------	---

SOLUCIÓN:

Para determinar puntos pasamos previamente las rectas a forma paramétricas:

$$a) r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{2-3y}{3} = 1-z \rightarrow r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-\frac{2}{3}}{-1} = \frac{z-1}{-1} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = \frac{2}{3} - t \\ z = 1 - t \end{cases} \rightarrow A\left(1, \frac{2}{3}, 1\right), B\left(3, -\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$b) s \equiv \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -3z + 2 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = 2 - 3s \\ z = s \end{cases} \rightarrow P(-1, 2, 0), Q(1, -1, 1)$$

4	Pasar a la forma continua y hallar un vector director de las rectas: a) $r \equiv \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -z - 2 \end{cases}$ b) $s \equiv \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$
----------	--

SOLUCIÓN:

$$a) r \equiv \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -z - 2 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases} \rightarrow r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1} \rightarrow \vec{u} = (2, -1, 1)$$

$$b) s \equiv \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 2x - 2 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 3 \\ z = 2t - 2 \end{cases} \rightarrow s \equiv x = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{2} \rightarrow \vec{v} = (1, 2, 2)$$

- 5** Hallar en forma paramétricas y general la ecuación del plano que pasa por el punto A(1, -2, 2) y con vectores de dirección $\vec{u}$ y $\vec{v}$:
- a) $\vec{u}(0, -1, 2)$ y $\vec{v}(1, 3, 2)$ b) $\vec{u}(0, -1, -3)$ y $\vec{v}(-1, 2, -3)$

SOLUCIÓN:

$$a) \pi \equiv \begin{cases} x=1+s \\ y=-2-t+3s \\ z=2+2t+2s \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -8(x-1) + 2(y+2) + z-2 = 0 \rightarrow 8x - 2y - z - 10 = 0$$

$$b) \alpha \equiv \begin{cases} x=1-s \\ y=-2-t+2s \\ z=2-3t-3s \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 9(x-1) + 3(y+2) - (z-2) = 0 \rightarrow 9x + 3y - z - 1 = 0$$

- 6** Hallar las ecuaciones paramétricas, ecuación continua y un vector de dirección de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 2x-3y+z-1=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Para obtener las ecuaciones paramétricas resolvemos el sistema:

$$r \equiv \begin{cases} 2x-3y+z-1=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x+z=3y+1 \\ x=y-2 \end{cases} \rightarrow \frac{2x+z=3y+1}{x=y-2} \rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x+z=3y+1 \\ -2x=-2y+4 \\ z=y+5 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=y-2 \\ z=y+5 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-2+t \\ y=t \\ z=5+t \end{cases}$$

$$r \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{1} \rightarrow \vec{u} = (1, 1, 1)$$

- 7** Hallar la ecuación del plano que contenga al punto P(1, 1, 1) y sea paralelo a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x-2y=0 \\ y-2z+4=0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Vector director de r: $\vec{u} = (1, -2, 0) \times (0, 1, -2) = (4, 2, 1)$

Vector director de s: $\vec{v} = (1, -1, 1)$

$$\text{Ecuación del plano: } \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 3(x-1) - 3(y-1) - 6(z-1) = 0 \rightarrow x - y - 2z + 2 = 0$$

- 8** Hallar la ecuación del plano que pasa por P(1, 1, 2) y es paralelo a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 3x+y=0 \\ 4x+z=0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x-y=2 \\ y-z=-3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Vector director de r: $\vec{u} = (3, 1, 0) \times (4, 0, 1) = (1, -3, -4)$

Vector director de s: $\vec{v} = (1, -1, 0) \times (0, 1, -1) = (1, 1, 1)$

Ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1) - 5(y-1) + 4(z-2) = 0 \rightarrow x - 5y + 4z - 4 = 0$$

9 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por A(1, 2, 2) y es paralela a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Vector director de r: $\vec{u} = (1, 0, -1) \times (0, 1, -2) = (1, 2, 1)$

La recta queda determinada por el punto A y el vector $\vec{u}$:

$$s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{1}$$

10 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Vector director de r: $\vec{u} = (1, -1, -1) \times (1, 1, 1) = (0, -2, 2)$

La recta queda determinada por el punto A y el vector $\vec{u}$:

$$s \equiv \frac{x}{0} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

11 Averiguar si son paralelos los planos de cada uno de los siguientes apartados:

a) $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ $\pi_2 \equiv x - y = 0$ b) $\pi_1 \equiv x + y = 0$ $\pi_2 \equiv x = 2$

SOLUCIÓN:

Los planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos, o sea, proporcionales:

a) $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$ $\vec{n}_2 = (1, -1, 0) \rightarrow \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{1}{0} \rightarrow$ son secantes

b) $\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$ $\vec{n}_2 = (1, 0, 0) \rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{0} \rightarrow$ son secantes

12 Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$

y es paralelo al vector de extremos A(2, 0, 0) y B(0, 1, 0)

SOLUCIÓN:

Vector director de r: $\vec{u} = (2, 3, 1)$ Punto de r P(1, 1, 0)

Vector $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 0)$

La ecuación del plano queda determinada por el punto P y los vectores de dirección $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -(x-1) - 2(y-1) + 8z = 0 \rightarrow x + 2y - 8z - 3 = 0$$

13 Hallar las ecuaciones de los ejes y planos de coordenadasSOLUCIÓN:

Sean los vectores ortonormales:

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$\text{Eje OX} \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\text{Eje OY} \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\text{Eje OZ} \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{Plano xy: } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z = 0$$

$$\text{Plano xz: } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\text{Plano yz: } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x = 0$$

14 Hallar los valores de a para que sean paralelas las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y}{2a} = \frac{z}{1} \quad s \equiv \begin{cases} x = -t \\ y = -2-2t \\ z = -at \end{cases}$$

SOLUCIÓN:Vector director de r: $\vec{u} = (a, 2a, 1)$ Vector director de s: $\vec{v} = (-1, -2, -a)$

Para que las rectas r y s sean paralelas deben ser paralelos sus vectores de dirección, o sea, proporcionales:

$$\frac{a}{-1} = \frac{2a}{-2} = \frac{1}{-a} \rightarrow \begin{cases} -2a = -2a \\ a^2 = 1 \end{cases} \rightarrow a = \pm 1$$

Para ningún valor de a las rectas son coincidentes ya que la recta r no pasa por el punto B(0, -2, 0) de la recta s, ya que al sustituir en las ecuaciones de r obtenemos:

$$\frac{-1}{a} = \frac{-2}{2a} \neq 0$$

15 Estudiar si las rectas r y s son coplanarias. En caso afirmativo, hallar la ecuación del plano que las contiene.

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-1} \quad s \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$$

SOLUCIÓN:Vector director de r: $\vec{u} = (1, -2, -1)$ Punto de r: A(2, -2, 1)Vector director de s: $\vec{v} = (-2, -1, 1)$ Punto de s: B(-3, 2, 0)Las rectas son coplanarias si el $\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 - 3 = 0 \rightarrow \text{Por tanto, son coplanarias.}$$

La ecuación del plano viene determinada por el punto A (ó B) y los vectores de dirección de r y s:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ x-2 & y+2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3(x-2) - 3(y+2) + 3(z+1) = 0 \rightarrow x + y - z - 1 = 0$$

16

Hallar las ecuaciones de una recta paralela al vector $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y que corte a las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 2 \end{cases}$$

Sugerencia: Estudiar previamente la posición relativa entre r y s.SOLUCIÓN:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1} \rightarrow \text{Vector director: } \vec{u}_r = (2, 3, 1) \quad \text{Punto de r: } A(1, -2, 0)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 2 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \text{Vector director: } \vec{u}_s = (2, -1, 1) \quad \text{Punto: } B(1, 2, 0)$$

Las dos rectas son coplanarias si el $\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overline{AB}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Por tanto, son coplanarias} \rightarrow r \text{ y } s \text{ son secantes.}$$

Calculamos el punto de corte, para ello sustituimos las coordenadas de cualquier punto de s en la ecuación de la recta r:

$$\frac{1+2t-1}{2} = \frac{2-t+2}{3} = \frac{t}{1} \rightarrow t = \frac{4-t}{3} = t \rightarrow 3t = 4-t \rightarrow t = 1 \rightarrow \text{Punto } r \cap s: P(3, 1, 1)$$

Ecuación de la recta dada por el punto P y el vector $\vec{u}$:

$$r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

17

Determinar si los puntos A(1, 0, 4), B(3, 0, 1), C(2, 0, 0), D(0, 4, 0) son o no coplanarios.

SOLUCIÓN:Los puntos A, B, C, D y E son coplanarios si $\text{rango}(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = (2, 0, -3) \\ \overline{AC} = (1, 0, -4) \\ \overline{AD} = (-1, 4, -4) \end{array} \right\} \rightarrow \text{Determinamos } \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} = 3 \text{ ya que el determinante es igual a } 4 \cdot (-8+3) = -20$$

Por tanto no son coplanarios.

18

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-1, -3, 0) y es paralela a la recta:

$$s \equiv \begin{cases} x = z + 2 \\ y = z - 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:Vector director de s: $\vec{u}_s = (1, 0, -1) \times (0, 1, -1) = (1, 1, 1)$ La recta está determinada por el punto A y el vector $\vec{u}_s$:

$$r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{0}$$

19 Hallar la ecuación del plano paralelo a $-x - 2y + 3z - 7 = 0$ que pasa por el punto A(1, 2, -2).

SOLUCIÓN:

El plano tiene como vector normal $\vec{n} = (-1, -2, 3)$

Ecuación del plano: $-(x - 1) - 2(y - 2) + 3(z + 2) = 0 \rightarrow x + 2y - 3z - 11 = 0$

20 Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo al plano determinado por el punto (1, -1, 0) y la recta que pasa por el punto (2, 2, 2) y tiene como vector director $\vec{u} = (1, 2, 3)$.

SOLUCIÓN

Sea π el plano definido por el punto A(1, -1, 0) y la recta dada por el punto B(2, 2, 2) y el vector $\vec{u} = (1, 2, 3)$:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 3, 2) \rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ x-1 & y+1 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 5(x-1) - (y+1) - z = 0 \rightarrow \pi \equiv 5x - y - z - 6 = 0$$

El plano buscado es paralelo a π , por tanto, sus vectores normales son proporcionales.

La ecuación del plano es $5x - y - z = 0$.

21 Dadas las rectas r y s averiguar si son coplanarias y si lo son hallar el punto de intersección:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = 3z + 2 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = z + 4 \\ y = 2z + 7 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Consideramos el sistema formado por las cuatro ecuaciones, estudiamos la solución del sistema.

Sea M la matriz de los coeficientes y M^* la matriz ampliada

Estudiamos el rango de M^* :

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F3=F3-F1 \\ F4=F4-F2}]{F3=F3-F1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F4=F4-F3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango } M = 3, \text{ rango } M^* = 4$$

Ambas rectas se cruzan.

22 Dadas las rectas r y s averiguar si son coplanarias y si lo son hallar el punto de intersección:

$$r \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = -z \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Consideramos el sistema formado por las cuatro ecuaciones, estudiamos la solución del sistema.

Sea M la matriz de los coeficientes y M^* la matriz ampliada

Estudiamos el rango de M^* :

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F3=F3-F1 \\ F4=F4-F1}]{F3=F3-F1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3=F3-F2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango } M = 3, \text{ rango } M^* = 4$$

Ambas rectas se cruzan.

23	Determinar la posición relativa de las rectas: a) $r \equiv x = y = z$ $s \equiv 2x + 1 = 2y = 2z + 2$ b) $r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z - 3}{3}$ $s \equiv \frac{x - 1}{3} = y - 2 = \frac{z - 3}{2}$
-----------	--

SOLUCIÓN

a) Vector director de r : $\vec{u}_r = (1, 1, 1)$ Punto de r : $A(0, 0, 0)$

$$s \equiv 2x + 1 = 2y = 2z + 2 \rightarrow s \equiv \begin{cases} 2x - 2y + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Vector director: } \vec{u}_s = (2, -2, 0) \times (0, 1, -1) = (2, 2, 2)$$

Ambas direcciones son proporcionales $\rightarrow r$ y s son paralelas o coincidentes.

La recta s no pasa por el punto $A(0, 0, 0)$ ya que al sustituir en su ecuación obtenemos: $\begin{cases} 1 = 0 \\ -1 = 0 \end{cases}$

Por tanto, ambas rectas son paralelas

b) Vector director de r : $\vec{u}_r = (1, 1, 3)$ Punto de r : $A(1, 2, 3)$

Vector director de s : $\vec{u}_s = (3, 1, 2)$ Punto de r : $B(1, 2, 3)$

Ambas rectas tienen distintas direcciones por ser sus vectores direccionales no proporcionales, además se cortan en el punto $(1, 2, 3)$.

24	Sean las rectas: $r \equiv \begin{cases} 5z = \alpha(x - 3) + 10 \\ 5y = x + 2 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x - 1}{-5} = \frac{y}{\alpha} = \frac{z - 1}{2}$ a) Demostrar que se cruzan para todo valor de α. b) Hallar para qué valor de α la recta s es paralela al plano $2x + 3y - z + 1 = 0$
-----------	--

SOLUCIÓN

$$r \equiv \begin{cases} 5z = \alpha(x - 3) + 10 \\ 5y = x + 2 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} z = \frac{\alpha}{5}x + \frac{10 - 3\alpha}{5} \\ y = \frac{x}{5} + \frac{2}{5} \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 5t \\ y = t + \frac{2}{5} \\ z = \alpha t + \frac{10 - 3\alpha}{5} \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r = (5, 1, \alpha) \quad A\left(0, \frac{2}{5}, \frac{10 - 3\alpha}{5}\right)$$

Vector director de s : $\vec{u}_s = (-5, \alpha, 2)$ Punto: $B(1, 0, 1)$

Para que se crucen hay que imponer que $\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overline{AB}) \neq 0$ siendo $\overline{AB} = \left(1, -\frac{2}{5}, \frac{3\alpha - 5}{5}\right) \rightarrow$

$$\overline{AB} = (5, -2, 3\alpha - 5)$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & \alpha \\ -5 & \alpha & 2 \\ 5 & -2 & 3\alpha - 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha + 1 & 2 + \alpha \\ 0 & -3 & 2\alpha - 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot (2\alpha^2 - 3\alpha - 5 + 6 + 3\alpha) = 5 \cdot (2\alpha^2 + 1) \neq 0 \rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

Para que la recta s sea paralela al plano se debe imponer que $\vec{u}_s \perp \vec{n}$:

$$(-5, \alpha, 2) \cdot (2, 3, -1) = 0 \rightarrow -10 + 3\alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha = 4$$

25	Para cada número real k se considera el plano π: $\pi \equiv (2k + 1)x + (1 - k)y + (1 + 3k)z + 2k - 1 = 0$ Demostrar que todos los planos anteriores pasan por una recta r y calcular las ecuaciones paramétricas de dicha recta.
----	--

SOLUCIÓN

$$(2k + 1)x + (1 - k)y + (1 + 3k)z + 2k - 1 = 0 \rightarrow (x + y + z - 1) + k(2x - y + 3z + 2) = 0$$

Hemos obtenido la ecuación del haz de planos de arista la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

Obtenemos las ecuaciones paramétricas, resolviendo el sistema:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2x - y = -2 - 3z \end{cases} \rightarrow x = \frac{-1 - 4z}{3} \rightarrow y = \frac{1 + 4z}{3} + 1 - z = \frac{4 + z}{3}$$

$$3x = -1 - 4z$$

Por tanto, las ecuaciones son:

$$r \equiv x = \frac{-1 - 4t}{3}; y = \frac{4 + t}{3}; z = t$$

26	Determinar la posición relativa de la recta: $r \equiv \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 2t \end{cases}$ y el plano determinado por los puntos $A(1, 3, 2)$, $B(2, 0, 1)$, $C(1, 4, 3)$
----	---

SOLUCIÓN

Ecuación del plano: $\overline{AB} = (1, -3, -1)$ $\overline{AC} = (0, 1, 1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2(x-1) - (y-3) + (z-2) = 0 \rightarrow 2x + y - z - 3 = 0$$

Vector director de r : $\vec{u}_r = (1, 1, 1)$ Punto de r : $A(0, 0, 0)$

Vector normal del plano: $\vec{n} = (2, 1, -1)$.

Los vectores no son proporcionales $\rightarrow$ la recta y el plano son secantes.

Para determinar el punto de corte sustituimos las coordenadas de r en la ecuación del plano:

$$2(3t - 1) + t + 2 - 2t - 3 = 0 \rightarrow 5t - 3 = 0 \rightarrow t = \frac{3}{5} \rightarrow \text{Punto: } \left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}, \frac{6}{5} \right)$$

27	Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = 2z + p \\ y = -z + 3 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = -z + 1 \\ y = 2z + q \end{cases}$ a) Hallar la condición que deben cumplir p y q para que las rectas estén contenidas en un plano. b) Determinar p, q para que el plano pase por el punto P(1,1,1)
----	--

SOLUCIÓN

a) Pasamos las rectas a forma paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z + p \\ y = -z + 3 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2t + p \\ y = -t + 3 \\ x = t \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r = (2, -1, 1) \quad \text{Punto de } r: A(p, 3, 0)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -z + 1 \\ y = 2z + q \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t + q \\ z = t \end{cases} \rightarrow \vec{u}_s = (-1, 2, 1) \quad \text{Punto de } s: B(1, q, 0)$$

Para que estén contenidas en un plano hay que imponer que $\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB}) = 0$, siendo $\vec{AB} = (1 - p, q - 3, 0)$:

$$\begin{vmatrix} 1-p & q-3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3(1-p) - 3(q-3) = 0 \rightarrow q - p = 2$$

$$b) \begin{vmatrix} x-p & y-3 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3(x-p) - 3(y-3) + 3z = 0 \rightarrow x + y - z - p - 3 = 0$$

Como pasa por el punto P(1,1,1) $\rightarrow 1 + 1 - 1 - p - 3 = 0 \rightarrow p = -2$.

Como $q - p = 2$, para $p = -2 \rightarrow q = 0$.

28	Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x - y + z = -8 \\ 2x + 3y - z = -8 \end{cases}$ Hallar la ecuación de la recta que se apoya en ambas y pasa por el punto A(8, 5, 4).
----	---

SOLUCIÓN

Consideramos el haz de planos de arista r:

$$\pi_r \equiv x - 2y + z + 1 + k(2x + y - 2z + 2) = 0.$$

Calculamos el plano que contiene al punto A: $8 - 10 + 4 + 1 + k(16 + 5 - 8 + 2) = 0 \rightarrow 3 + 15k = 0 \rightarrow k = -1/5$

$$5(x - 2y + z + 1) - (2x + y - 2z + 2) = 0 \rightarrow 3x - 11y + 7z + 3 = 0$$

Consideramos el haz de planos de arista s:

$$\pi_s \equiv x - y + z + 8 + m(2x + 3y - z + 8) = 0$$

Calculamos el plano que contiene al punto A: $8 - 5 + 4 + 8 + m(16 + 15 - 4 + 8) = 0 \rightarrow 3 + 7m = 0 \rightarrow$

$$m = -3/7 \rightarrow 7(x - y + z + 8) - 3(2x + 3y - z + 8) = 0 \rightarrow x - 16y + 10z + 32 = 0$$

La recta buscada es:

$$\begin{cases} 3x - 11y + 7z + 3 = 0 \\ x - 16y + 10z + 32 = 0 \end{cases}$$

29

Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y = z$$

$$s \equiv \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la recta que se apoya en ambas y tiene como vector director $\vec{u} = (-1, 3, -1)$.SOLUCIÓNVector director de r: $\vec{u}_r = (2, 1, 1)$ Punto de r: A(1, 0, 0)

$$s \equiv \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow \vec{u}_s = (1, 2, 0) \quad \text{Punto de s: B(0, -1, 3)}$$

Plano determinado por A, $\vec{u}_r$ y $\vec{u}$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -4(x-1) + y + 7z = 0 \rightarrow 4x - y - 7z - 4 = 0$$

Plano determinado por B, $\vec{u}_s$ y $\vec{u}$:

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2x + y + 1 + 5(z-3) = 0 \rightarrow 2x - y - 5z + 14 = 0$$

$$\text{La recta buscada es: } \begin{cases} 4x - y - 7z - 4 = 0 \\ 2x - y - 5z + 14 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \frac{x-9}{1} = \frac{y-32}{-3} = \frac{z}{1}$$

30

Dadas las rectas:

$$r \equiv x = y = z$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad t \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la recta que se apoya en r y s y es paralela a t.

SOLUCIÓNVector director de r: $\vec{u}_r = (1, 1, 1)$ Punto de r: A(0, 0, 0)Vector director de s: $\vec{u}_s = (0, 0, 1)$ Punto de s: B(2, 1, 0)

$$t \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \rightarrow t \equiv \begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases} \rightarrow t \equiv \begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases} \rightarrow t \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \vec{u}_t = (1, -1, 1)$$

Determinamos el plano paralelo a t y que contiene a r:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x - 2z = 0 \rightarrow x - z = 0$$

Determinamos el plano paralelo a t y que contiene a s:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 2 + y - 1 = 0 \rightarrow x + y - 3 = 0$$

$$\text{La recta buscada es: } \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{1}$$

31 Determinar a y b para que los planos:

$$\begin{cases} \pi \equiv 2x - y + z = 3 \\ \pi' \equiv x - y + z = 2 \\ \pi'' \equiv 3x - y - az = b \end{cases}$$

se corten en una recta. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto A(2, 1, 3)

SOLUCIÓN:

Estudiar las posiciones relativas de los tres planos equivale a discutir el sistema.

Consideramos la matriz de los coeficientes y la ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -a \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -a & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -a & b \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3=F_3-F_1 \\ F_2=F_2-F_1}]{F_2=F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1-a & b-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1-a & b-4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango } M = 2 \text{ si } a = -1. \rightarrow \begin{cases} \text{rang}(M^*) = 2 \text{ si } b = 4 \\ \text{rang}(M^*) = 3 \text{ si } b \neq 4 \end{cases}$$

Por tanto se cortan en una recta si $a = -1$ y $b = 4$.

La ecuación de la recta es:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

El haz de planos de arista r es:

$$(2x - y + z - 3) + k(x - y + z - 2) = 0$$

El plano pasa por A(2, 1, 3) $\rightarrow (4 - 1 + 3 - 3) + k(2 - 1 + 3 - 2) = 0 \rightarrow k = -3/2$.

El plano es: $2(2x - y + z - 3) - 3(x - y + z - 2) = 0 \rightarrow x + y - z = 0$

32 Hallar el valor de k para que los planos:

$$\begin{cases} \pi \equiv x + y + z = 2 \\ \pi' \equiv 2x + 3y + z = 3 \\ \pi'' \equiv kx + 10y + 4z = 11 \end{cases}$$

tengan una recta común y hallar las ecuaciones paramétricas de dicha recta

SOLUCIÓN:

Consideramos la matriz de los coeficientes y la ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ k & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$|M| = 14 - 2k = 0 \rightarrow k = 7$$

Para $k = 7$, $\text{rango } M^* = 2 = \text{rango } M$ ya que $F_3 = 3F_2 + F_1$

Resolvemos el sistema formado por las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 2 - z \\ 2x + 3y = 3 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 + z \\ x = 3 - 2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 - 2z \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$$

33	Estudiar la posición relativa de los planos: $\begin{cases} \pi \equiv mx + y - z = 1 \\ \pi' \equiv 2x - y + mz = 3m \\ \pi'' \equiv x - 2y + (m+1)z = 3m - 1 \end{cases}$ según los distintos valores de m.
----	---

SOLUCIÓN:

Consideramos la matriz de los coeficientes y la ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & -1 & m \\ 1 & -2 & m+1 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & m & 3m \\ 1 & -2 & m+1 & 3m-1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = m(-m - 1 + 2m) - 2(m + 1 - 2) + m - 1 = m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow m = 1.$$

Para $m = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F2=F2-2F1 \\ F3=F3-F1}]{F2=F2-2F1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango } M^* = 2 = \text{rango } M \rightarrow \text{Se cortan en una recta}$$

Para $m \neq 1$:

$$\text{rango } M^* = 3 = \text{rango } M \rightarrow \text{Se cortan en un punto.}$$