1 **Halla la expresión del haz de planos que pasa por la recta** $\begin{cases} \mathbf{x + 2y - z + 6 = 0} \\ \mathbf{-x + 3y + 2z - 1 = 0} \end{cases}$

Solución:
x + 2y - z + 6 + t(-x + 3y + 2z - 1) = 0 con t un parámetro real.
Habría que añadir, además, el plano -x + 3y + 2z - 1 = 0.

2 **Halla la expresión del haz de planos que pasa por la recta** $\begin{cases} \mathbf{4x + y - 7z + 2 = 0} \\ \mathbf{-3x + 5z - 2 = 0} \end{cases}$

Solución:
4x + y - 7z + 2 + t(-3x + 5z - 2) = 0 con t un parámetro real.
Habría que añadir, además, el plano -3x + 5z - 2 = 0.

3 **Hallar el plano que contiene el eje OY y forma un ángulo de 30º con el eje OX.**

Solución:
El vector director del eje OX es (1, 0, 0). Sea u = (a, b, c) un vector unitario característico del plano buscado. Entonces
(a, b, c) . (1, 0, 0) = a = cos 30º = 1/2, ya que el ángulo que forman un plano y una recta es el complementario del que forman el vector característico del plano y el director de la recta.
Además, contiene al eje OY, cuyo vector director es (0, 1, 0), luego (a, b , c) . (1, 0, 0) = b = 0.
Por lo tanto u = (1/2, 0, c). Imponiendo que sea unitario

$$|u| = \sqrt{\frac{1}{4} + c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por contener al eje OY el plano pasa por (0, 0, 0). Sus posibles vectores característicos son:

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Por tanto, los planos buscados son:

$$x + \sqrt{3}\, z = 0 \quad \text{ó} \quad x - \sqrt{3}\, z = 0$$

4 **Sean los planos p y q , siendo: p : ax + y - 2z + 1 = 0 ; q : 2x - y +2z - 3 = 0**
Determinar a para que:
a) los planos sean perpendiculares.
b) los planos determinen un ángulo de 60º.

Solución:
Los vectores normales a los planos son:

$$\vec{p} = (a,1,-2) \quad \vec{q} = (2,-1,2)$$

a) Si son perpendiculares, se cumple que su producto escalar es 0:
2a - 1 - 4 = 0; a = 5/2
b) cos (p, q) = cos 60º = 1/2

$$|\cos(\vec{p},\vec{q})| = \frac{|2a-5|}{\sqrt{a^2+5}\cdot\sqrt{9}} = \frac{1}{2} \qquad 4(2a-5)^2 = 9(a^2+5) \qquad a_1 = \frac{80+\sqrt{4860}}{14}; a_2 = \frac{80-\sqrt{4860}}{14}$$

5 **Calcula el punto P de la recta $\begin{cases} \mathbf{x = 0} \\ \mathbf{y = 1} \\ \mathbf{z = t} \end{cases}$ de modo que el plano que contiene al eje OX y pasa por P forme un ángulo de 45º con el eje OZ.**

Solución:
P es de la forma P(0, 1, t).

El plano que contiene a OX y pasa por P es $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & t \end{vmatrix} = -ty + z = 0$

Como sen45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{|(0,-t,1)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{t^2+1}\cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t^2 + 1 = 2$

Entonces $t_1 = 1$ y $t_2 = -1$.
Soluciones: $P_1(0, 1, 1)$, $P_2(0, 1, -1)$

6 **Calcular la distancia entre las rectas:**

$$\mathbf{r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{4}} \qquad \mathbf{y} \qquad \mathbf{s \equiv \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 \\ z = 8 + 2t \end{cases}}$$

Solución:
La recta r pasa por el punto A (2, 2, -1) y es paralela al vector u = (3, -1, 4), y la recta s pasa por el punto B (5, -1, 8) y es paralela al vector v = (1, 0, 2).
El volumen del paralelepípedo de la figura es igual al producto mixto de los vectores BA, u y v. Si este volumen lo dividimos por el área de la base, que es igual al módulo del producto vectorial de u y v, tendremos la altura del paralelepípedo, que es igual a la distancia entre r y s.

$$\text{dist}(r,s) = \frac{|[BA, u, v]|}{|u \times v|}$$

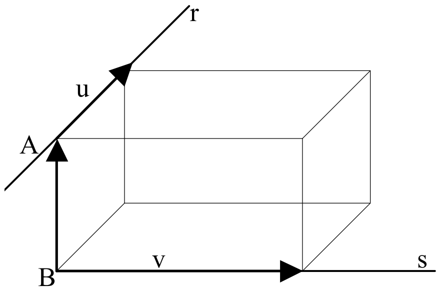
siendo el vector BA = (-3, 3, -9)

$$[BA, u, v] = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 9 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 2j + k$$

de donde:

$$\text{dist}(r,s) = \frac{9}{\sqrt{4+4+1}} = 3$$



7 **La recta r viene determinada por el punto A (1, -3, 0) y el vector direccional $\vec{u} = (2,4,1)$ y la recta s por el punto B (-1, 2, -4) y el vector direccional $\vec{v} = (-1,3,2)$.**

1) Calcular el $\left|\det(\overline{AB}, \vec{u}, \vec{v})\right|$ e interpretar su significado.

2) Calcular $|\vec{u} \times \vec{v}|$ e interpretar su significado.

3) Cuál es el significado de $\dfrac{\left|\det(\overline{AB}, \vec{u}, \vec{v})\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$.

Solución:
1) Siendo

$\overline{AB} = B - A = (-2,5,-4)$

$$\left|\overline{AB},\vec{u},\vec{v}\right| = \left\|\begin{matrix} -2 & 5 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}\right\| = -75$$

su módulo 75 es el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overline{AB},\vec{u}$ y $\vec{v}$.

2) $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \left|5\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3\right| = \sqrt{5^2+5^2+10^2} = \sqrt{150}$ y representa el área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

3) El cociente pedido tiene por valor $\dfrac{75}{\sqrt{150}} = 5\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y como es el volumen dividido por el área de la base representa la distancia entre las rectas r y s.

8 **Halla la perpendicular común a las rectas $\begin{cases} \mathbf{2x+y=0} \\ \mathbf{-x+y+2z=0} \end{cases}$ y $\begin{cases} \mathbf{-x+2y+z-1=0} \\ \mathbf{x+y+3z+2=0} \end{cases}$.**

Solución:
Hay que obtener un plano que contenga a la primera y sea perpendicular a ambas y otro plano que contenga a la segunda recta y también sea perpendicular a ambas.

Las rectas en paramétricas son: $\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t \\ z = 3t \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{-5-5z}{3} \\ y = \dfrac{-1-4z}{3} \\ z = z \end{cases}$

Un vector perpendicular a ambas es: $(2,-4,3)\times(-5,-4,3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & 3 \\ -5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = (0,-21,-28)$

Se puede tomar también el vector (0, 3, 4) por ser proporcional.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -25x - 8y + 6z = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+\dfrac{5}{3} & y+\dfrac{1}{3} & z \\ -5 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -25\left(x+\frac{5}{3}\right) + 20\left(y+\frac{1}{3}\right) - 15z = -25x + 20y - 15z - 35 = 0$$

La perpendicular común es: $\begin{cases} -25x - 8y + 6z = 0 \\ -5x + 4y - 3z - 7 = 0 \end{cases}$

9 **Hallar la recta perpendicular común a las rectas r: x = y = z ; s: x -1 = y/3 = z**

Solución:
Escribamos las ecuaciones paramétricas:

$$r:\begin{cases} x = m \\ y = m \\ z = m \end{cases} \quad y \quad s:\begin{cases} x = 1+n \\ y = 3n \\ z = n \end{cases}$$

Si a y b son, respectivamente, los valores de m y n que nos dan los puntos P y Q, intersección de la perpendicular común con r y s, o sea P (a, a, a) y Q (1+ b, 3b, b), el vector :
PQ = (1 + b - a, 3b - a, b - a)
es perpendicular a las rectas r y s.
Como el vector u = (1, 1, 1) es paralelo a la recta r y el vector v = (1, 3, 1) es paralelo a s, el vector PQ es perpendicular a u y v, luego los productos escalares u · PQ y v · PQ son nulos:

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}\cdot\overrightarrow{PQ} = 0 \\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{PQ} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 1\cdot(1+b-a)+1\cdot(3b-a)+1\cdot(b-a) = 0 \\ 1\cdot(1+b-a)+3\cdot(3b-a)+1\cdot(b-a) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en las coordenadas de P y Q obtenemos:

$$P\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right) \quad y \quad Q\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$$

La recta pedida es la que pasa por ambos puntos:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4} + t \\ y = \dfrac{3}{4} \\ z = \dfrac{3}{4} - t \end{cases}$$

10 **Obtén los puntos P de r: $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{-1}$ y Q de s: $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = z+1$ que verifican que d(P, Q) = d(r, s) sin hallar la perpendicular común a r y s.**

Solución:

$$P_r(1+2t, t, -1-t), P_s(-2-w, 1+2w, -1+w) \Rightarrow \overrightarrow{P_rP_s} = (-w-2t-3, 2w-t+1, w+t)$$

Como este vector debe ser perpendicular a las dos rectas, entonces:

$$\left.\begin{aligned} (-w-2t-3, 2w-t+1, w+t)\cdot(2,1,-1) = -6t-w-5 = 0 \\ (-w-2t-3, 2w-t+1, w+t)\cdot(-1,2,1) = t+6w+5 = 0 \end{aligned}\right\}$$

y resolviendo el sistema se obtiene $t = w = -\frac{5}{7}$, de donde:

$$P_r\left(-\frac{3}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{2}{7}\right), P_s\left(-\frac{9}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{12}{7}\right)$$