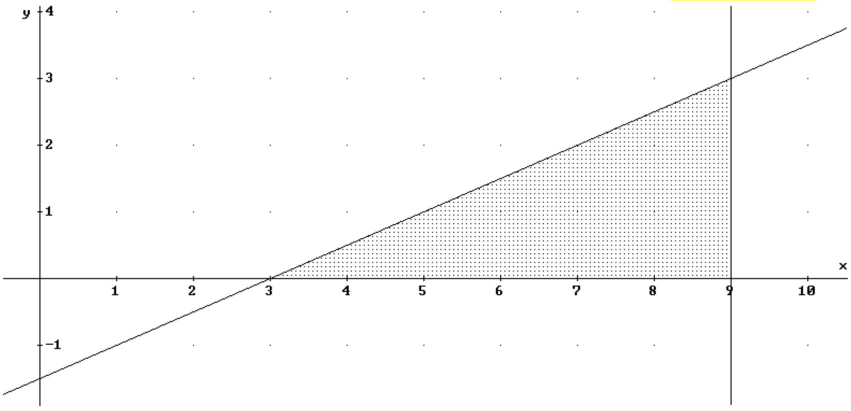
EJERCICIOS RESUELTOS DE CÁLCULO DE ÁREAS POR INTEGRACIÓN

1.- Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=\dfrac{x-3}{2}$, el eje OX, y las rectas $x = 3$ y $x = 9$

Se trata de un triángulo de base 6 y altura $f(9)=3$

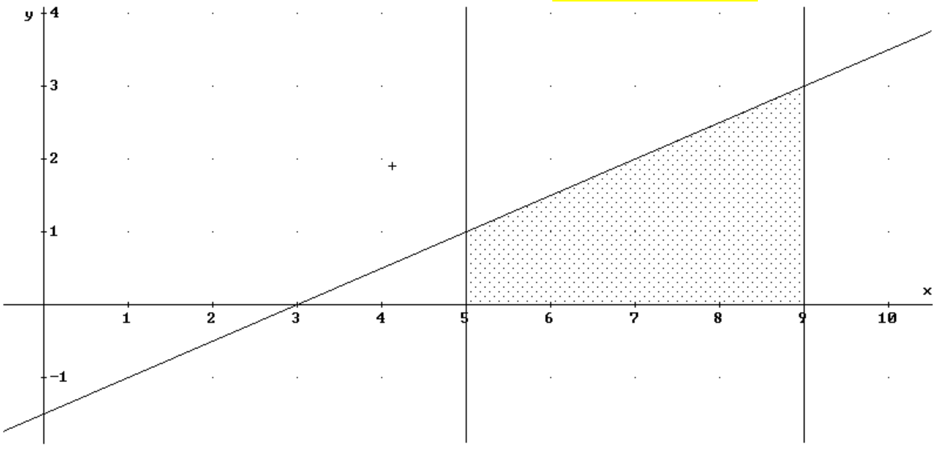
El área sombreada es = $\displaystyle\int_3^9 \frac{x-3}{2}dx = \frac{1}{2}\int_3^9\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)dx = \frac{6\cdot 3}{2} = 9 \text{ u}^2$



2.- Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=\dfrac{x-3}{2}$, el eje OX, y las rectas $x = 5$ y $x = 9$

Es un trapecio de bases: $f(5)=1$ y $f(9)=3$, y de altura 4 unidades

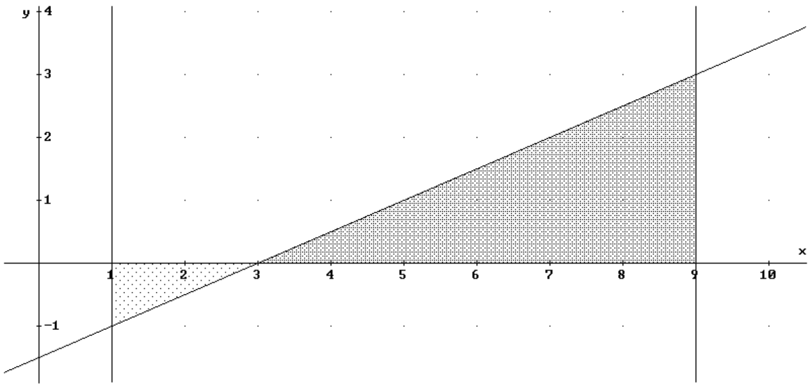
Es el área sombreada = $\displaystyle\int_5^9 \frac{x-3}{2}dx = \frac{(1+3)\cdot 4}{2} = 8 \text{ u}^2$



3.- Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=\dfrac{x-3}{2}$, el eje OX, y las rectas $x = 1$ y $x = 9$

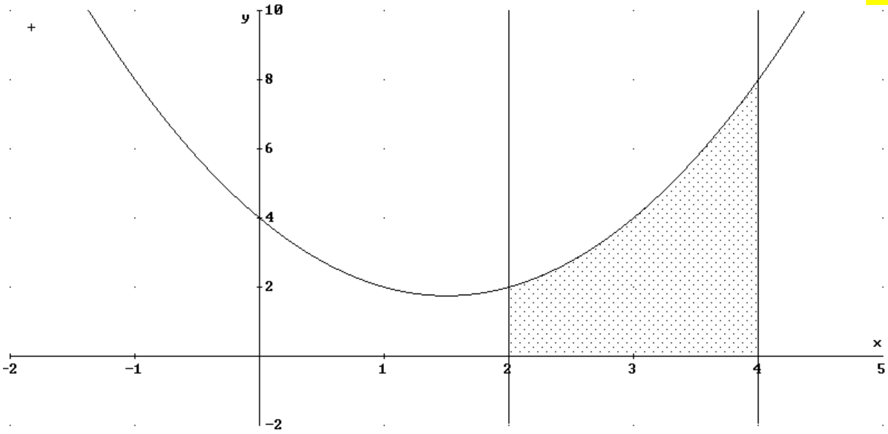
Es la suma de dos triángulos. El pequeño de base 2 y altura $f(1)=1$; el grande de base 6 y de altura $f(9)=3$

Es el área sombreada = $\dfrac{2\cdot 1}{2}+\dfrac{6\cdot 3}{2}=10\ \text{u}^2$



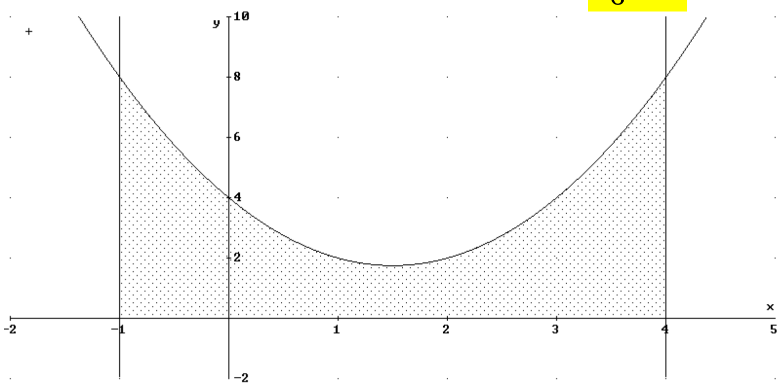
4.- Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=x^2-3x+4$, el eje OX, y las rectas $x = 2$ y $x = 4$

Es el área sombreada = $\int_2^4\left(x^2-3x+4\right)dx=\dfrac{x^3}{3}-3\dfrac{x^2}{2}+4x\Big|_2^4=\dfrac{26}{3}\ \text{u}^2$



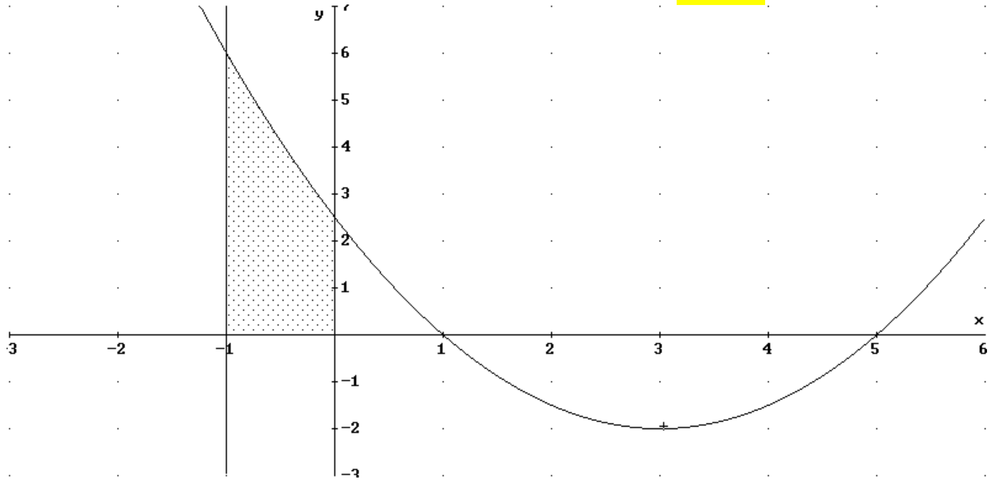
5.- Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=x^2-3x+4$, el eje OX, y las rectas $x = -1$ y $x = 4$

Es el área sombreada = $\int_{-1}^4\left(x^2-3x+4\right)dx=\dfrac{115}{6}\ \text{u}^2$



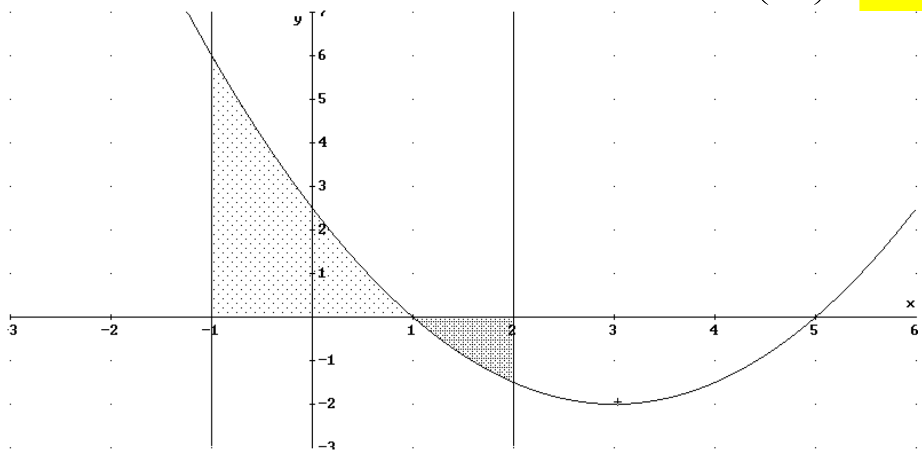
6.- Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{2}$, el eje OX, y las rectas $x=-1$ y $x=0$

Es el área sombreada = $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x^2-6x+5}{2}\,dx=\frac{25}{6}\ \text{u}^2$



7.- Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{2}$, el eje OX, y las rectas $x=-1$ y $x=2$

Es el área sombreada = $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2-6x+5}{2}dx-\int_{1}^{2}\frac{x^2-6x+5}{2}dx=\frac{32}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{37}{3}\ \text{u}^2$

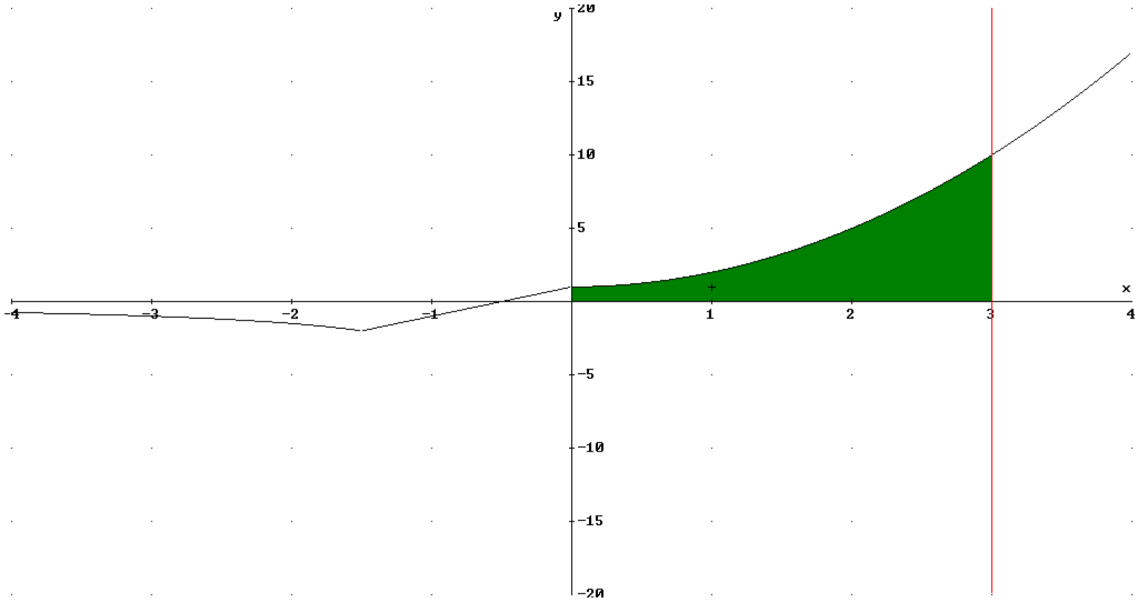


8.- Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x} & si\ \ x\le\dfrac{-3}{2}\\[2mm] 2x+1 & si\ \ \dfrac{-3}{2}\le x<0\\[2mm] x^2+1 & si\ \ x\ge 0\end{cases}$$

Se pide, calcular el área del recinto plano limitado por la grafica de $f(x)$, el eje OX, el eje OY y la recta $x=3$.

La representación gráfica del recinto al que hay que calcularle el área es:



Calculamos los límites de integración. Uno es $x = 0$ (ya que el área está limitada por el eje OY) y el otro es $x = 3$ (recta dada). Por tanto, el área pedida vendrá dada por la siguiente integral:

$$A = \int_0^3 \left(x^2 + 1\right)dx = \left.\frac{x^3}{3} + x\right]_0^3 =$$

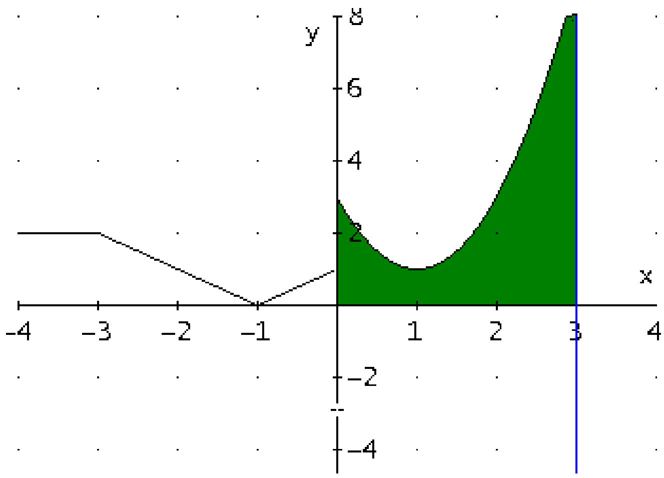
$$= \frac{3^3}{3} + 3 - \left(\frac{0^3}{3} - 0\right) = 12$$

Así, el área buscada es de 12 u^2.

9.- Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < -3 \\ |x+1| & si \quad -3 \le x < 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 & si \quad x \ge 0 \end{cases}$$

Se pide: Calcular el área de la región del plano limitada por la grafica de $f(x)$, el eje OX, el eje OY y la recta $x = 3$.



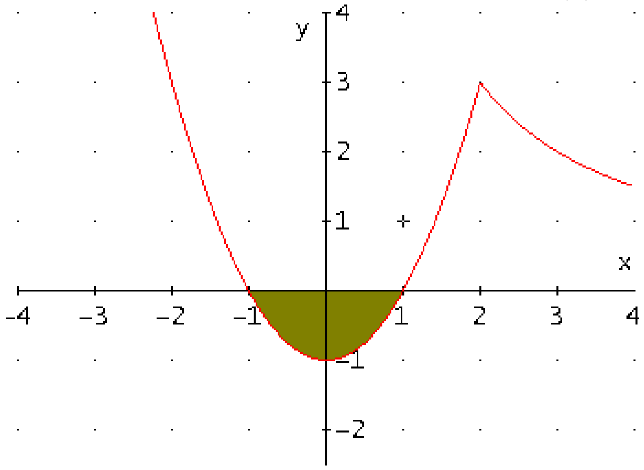
Los límites de integración son $x = 0$ (ya que el área pedida está limitada por el eje OY) y $x = 3$ (recta dada), y por tanto, el área pedida vale:

$$A=\int_0^3\left(2x^2-4x+3\right)dx=2\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+3x\Big]_0^3=2\frac{3^3}{3}-4\frac{3^2}{2}+3\cdot 3=18-18+9=9\text{ u}^2$$

10.- Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{6}{x} & si \quad x>2 \end{cases}$$

Se pide: Área del recinto cerrado que delimita la gráfica de $f(x)$ y el eje OX.



Los límites de integración son los puntos donde la función corta al eje OX. En nuestro caso:

$$x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

(ten en cuenta que $\frac{6}{x}\neq 0$ ya que una fracción es cero sólo cuando el numerador lo es)

El área pedida es[1]:

$$A=-\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big]_{-1}^{1}=-\frac{x^3}{3}+x\Big]_{-1}^{1}=$$

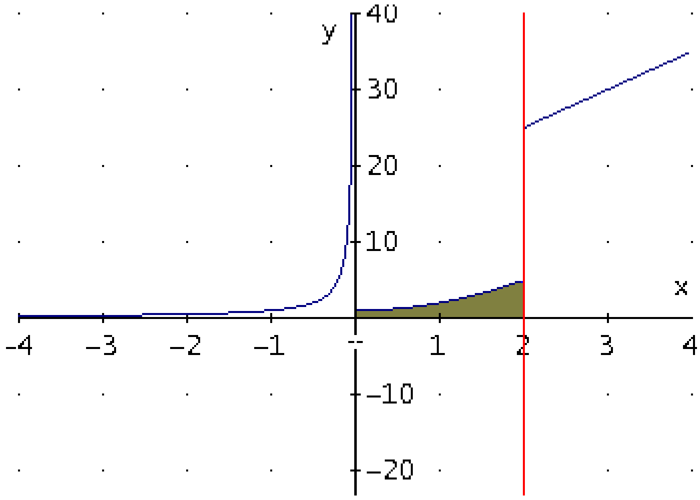
$$=-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}\text{u}^2$$

11.- Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{x} & si \quad x<0 \\ x^2+1 & si \quad 0\le x<2 \\ 5x+15 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Se pide: Área del recinto limitado por la grafica de $f(x)$, los ejes de coordenadas y la recta $x=2$.

[1] La integral lleva signo negativo, por que el área pedida está por debajo del eje X.



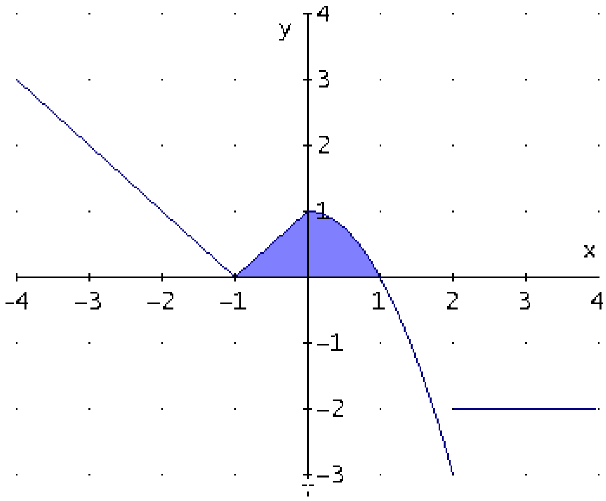
Los límites de integración son $x=0$ (ya que el área pedida está limitada por el eje OY) y $x=2$ (recta dada), y por tanto, el área pedida vale:

$$A=\int_0^2\left(x^2+1\right)dx=\left.\frac{x^3}{3}+x\right]_0^2=\frac{8}{3}+2-\left(\frac{0}{3}+0\right)=\frac{13}{3}\ \mathrm{u}^2$$

12.- Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}|x+1| & si\quad x\le 0\\ -x^2+1 & si\quad 0<x\le 2\\ -2 & si\quad x>2\end{cases}.$$

Se pide: Calcula el área del recinto cerrado que delimita la gráfica de la función con el eje *OX*.



Los límites de integración son los puntos de corte de la función con el eje OX:

$$|x+1|=0\Rightarrow x+1=0\Rightarrow x=-1$$

$-x^2+1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm1\Rightarrow$ solo nos vale $x=1$, ya que $x=-1$ está fuera del dominio

$-2=0$ nunca

Así, los límites de integración son $x=-1$ y $x=1$

El área pedida es:

$$A=\int_{-1}^{0}|x+1|\,dx+\int_{0}^{1}\left(-x^2+1\right)dx=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}\,\mathrm{u}^2$$

13.- Determina el valor de a para que el área comprendida por la gráfica de la función $f(x)=ax^2+2$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=2$ sea 21 unidades de área.

En este caso, los límites de integración nos vienen dados por las rectas $x=-1$ y $x=2$. Así, tenemos la siguiente integral:

$$A=\int_{-1}^{2}\left(ax^2+2\right)dx=21\Leftrightarrow \left[a\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{2}=21\Leftrightarrow a\frac{8}{3}+4-\left(-a\frac{1}{3}-2\right)=21\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8a}{3}+\frac{12}{3}+\frac{a}{3}+\frac{6}{3}=21\Leftrightarrow 9a+18=63\Leftrightarrow a=\frac{63-18}{9}\Leftrightarrow a=\frac{45}{9}\Leftrightarrow a=5$$

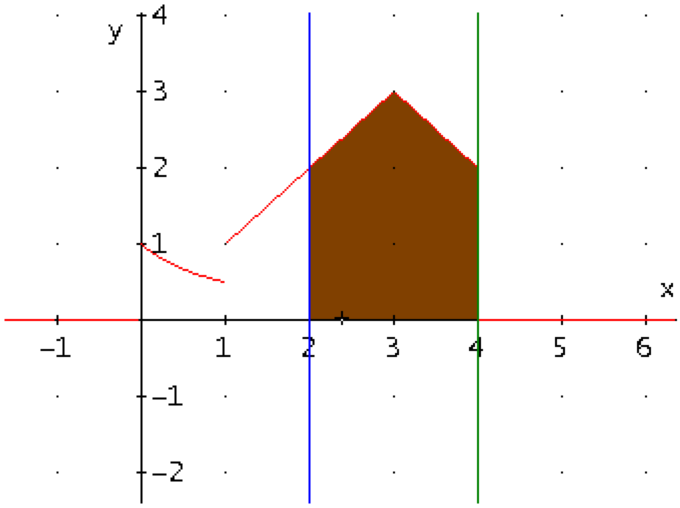
Por tanto, la función es $f(x)=5x^2+2$

14.- Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } 0\le x\le 1\\ x & \text{si } 1<x<3\\ 6-x & \text{si } 3\le x\le 4\end{cases}$$

Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y las rectas $x=2$ y $x=4$.

En este caso, los límites de integración nos vienen dados por las rectas $x=2$ y $x=4$. La gráfica de la función es:



Ojo, aunque los límites de integración son $x=2$ y $x=4$, en ese intervalo hay dos funciones que están por encima, luego hay que calcular el punto de corte de ambas funciones (sólo nos interesa la coordenada *x*), para dividir el intervalo en dos intervalos:

$$x=6-x\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=\frac{6}{2}=3$$

Por tanto, tenemos que calcular dos integrales:

1ª) Integral de la función $f_1(x)=x$ en el intervalo $[2,\ 3]$

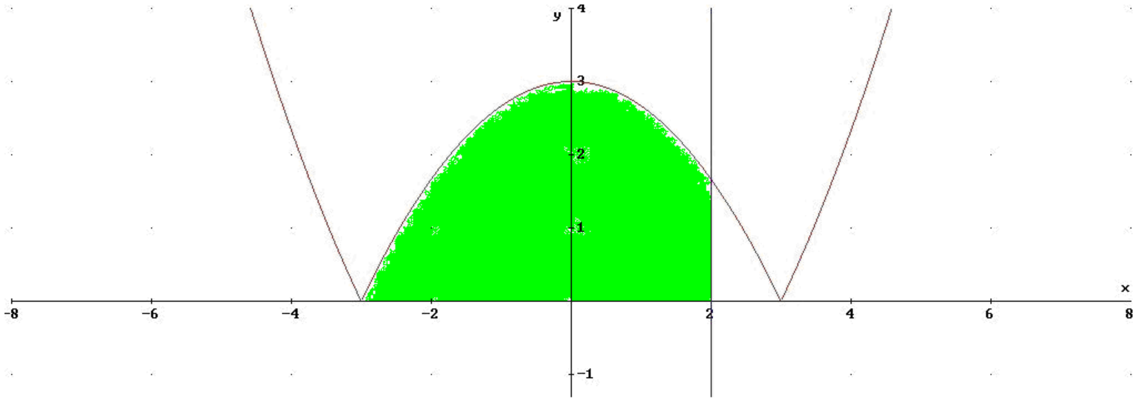
2ª) Integral de la función $f_2(x) = 6 - x$ en el intervalo $[3,\ 4]$

El área pedida vale:

$$A = \int_2^3 x\,dx + \int_3^4 (6-x)\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_2^3 + \left.6x - \frac{x^2}{2}\right]_3^4 = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} + 24 - \frac{16}{2} - \left(18 - \frac{9}{2}\right) = \frac{14}{2} - 2 =$$

$$= 5\ \text{u}^2$$

15.- Dada la función $f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^2 + 3 \right|$. Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y la recta $x = 2$.



Calculamos los límites de integración (puntos de corte con el eje OX):

$$f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^2 + 3 \right| = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 + 3 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = \frac{-3}{-\frac{1}{3}} = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Por tanto, el límite inferior de integración es $x = -3$ y el límite superior es $x = 2$, que es la recta que nos dan.

El área pedida es:

$$A = \int_{-3}^{2} \left(-\frac{1}{3}x^2 + 3 \right) dx = \left. -\frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + 3x \right]_{-3}^{2} = \frac{100}{9}\ \text{u}^2$$