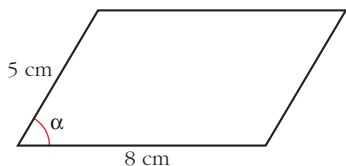


REFLEXIONA Y RESUELVE

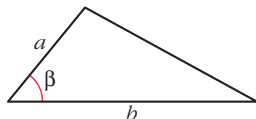
Relaciones trigonométricas en el triángulo

- Halla el área de este paralelogramo en función del ángulo α :



$$\text{Área} = 8 \cdot 5 \operatorname{sen} \alpha = 40 \operatorname{sen} \alpha \text{ cm}^2$$

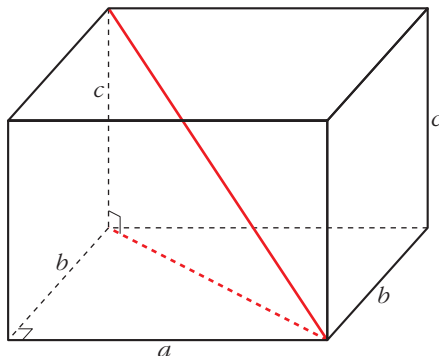
- Halla el área de este triángulo en función del ángulo β :



$$\text{Área triángulo} = \frac{a b \operatorname{sen} \beta}{2}$$

Diagonal de un ortoedro

- Halla la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son $c = 3 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ y $a = 12 \text{ cm}$.



$$\text{Diagonal} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

- Escribe la expresión general de la diagonal de un ortoedro de aristas a , b y c .

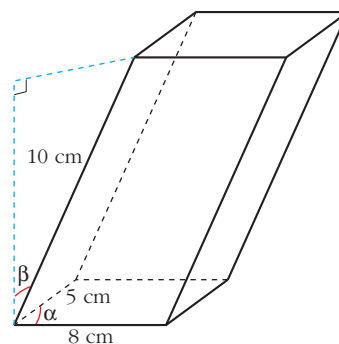
$$\text{En general: Diagonal} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Volumen de un paralelepípedo

- Halla el volumen de este paralelepípedo en función de α y de β :

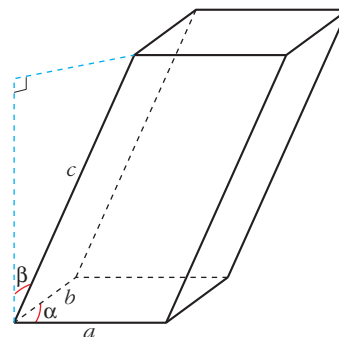
$$\left. \begin{array}{l} \text{Área base} = 40 \operatorname{sen} \alpha \\ \text{Altura} = 10 \cos \beta \end{array} \right\}$$

$$\text{Volumen} = 400 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \text{ cm}^3$$



- ¿Cuál será el volumen de un paralelepípedo de aristas a , b , c , tal que las dos aristas de la base formen entre sí un ángulo α , y las aristas laterales formen un ángulo β con la perpendicular?

$$\text{Volumen} = a b c \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$



Página 135

1. La propiedad $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$ relaciona el producto de números por vectores con el producto entre números.

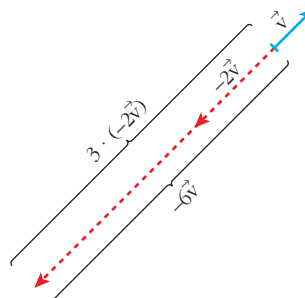
- a) De los cuatro productos que aparecen, ¿cuáles son del primer tipo y cuáles del segundo?
- b) Interpreta dicha propiedad para $a = 3$, $b = -2$ y $\vec{v}$ un vector cualquiera representado sobre el papel.

- a) Producto de números por vectores:

$$b \cdot \vec{v}; (a \cdot b) \cdot \vec{v}; a \cdot (b \cdot \vec{v})$$

$$\text{Producto entre números: } a \cdot b$$

- b) $\left. \begin{array}{l} a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 3 \cdot (-2\vec{v}) \\ (a \cdot b) \cdot \vec{v} = -6\vec{v} \end{array} \right\} 3 \cdot (-2\vec{v}) = -6\vec{v}$



2. La propiedad distributiva $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$ relaciona la suma de números con la suma de vectores.

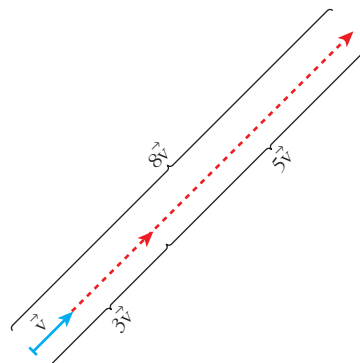
a) De las dos sumas que aparecen, ¿cuál es de cada tipo?

b) Interpreta dicha propiedad para $a = 3$, $b = 5$ y $\vec{v}$ un vector cualquiera representado sobre el papel.

a) Suma de números: $a + b$

Suma de vectores: $a\vec{v} + b\vec{v}$

$$\left. \begin{array}{l} b) (a + b) \cdot \vec{v} = 8\vec{v} \\ a\vec{v} + b\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v} \end{array} \right\} 8\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v}$$



Página 137

1. Si $\vec{u}(-3, 5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, -2)$, halla las coordenadas:

a) $2\vec{u}$ b) $0\vec{v}$ c) $-\vec{u}$ d) $2\vec{u} + \vec{v}$ e) $\vec{u} - \vec{v}$ f) $5\vec{u} - 3\vec{v}$

a) $2\vec{u} = 2 \cdot (-3, 5, 1) = (-6, 10, 2)$

b) $0 \cdot \vec{v} = (0, 0, 0)$

c) $-\vec{u} = -(-3, 5, 1) = (3, -5, -1)$

d) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-3, 5, 1) + (7, 4, -2) = (1, 14, 0)$

e) $\vec{u} - \vec{v} = (-3, 5, 1) - (7, 4, -2) = (-10, 1, 3)$

f) $5\vec{u} - 3\vec{v} = 5(-3, 5, 1) - 3(7, 4, -2) = (-36, 13, 11)$

2. Sean los vectores $\vec{x}(1, -5, 2)$, $\vec{y}(3, 4, -1)$, $\vec{z}(6, 3, -5)$, $\vec{w}(24, -26, -6)$. Halla a , b , c para que se cumpla:

$$a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{w}$$

$$a(1, -5, 2) + b(3, 4, -1) + c(6, 3, -5) = (24, -26, -6)$$

$$(a + 3b + 6c, -5a + 4b + 3c, 2a - b - 5c) = (24, -26, -6)$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 3b + 6c = 24 \\ -5a + 4b + 3c = -26 \\ 2a - b - 5c = -6 \end{array} \right\} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -92$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 3 & 6 \\ -26 & 4 & 3 \\ -6 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-552}{-92} = 6; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 24 & 6 \\ -5 & -26 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{184}{-92} = -2;$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 24 \\ -5 & 4 & -26 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-368}{-92} = 4$$

Solución: $a = 6$, $b = -2$, $c = 4$, es decir, $6\vec{x} - 2\vec{y} + 4\vec{z} = \vec{w}$.

Página 139

- 1. Respecto de una base ortonormal, las coordenadas de tres vectores son $\vec{u}(3, -1, 5)$, $\vec{v}(4, 7, 11)$, $\vec{w}(-2, k, 3)$.**

a) Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Halla k para que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -1, 5) \cdot (4, 7, 11) = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 + 5 \cdot 11 = 12 - 7 + 55 = 60$

b) Como $\vec{v} \neq 0$ y $\vec{w} \neq 0$, son perpendiculares si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 4 \cdot (-2) + 7 \cdot k + 11 \cdot 3 = -8 + 7k + 33 = 7k + 25 = 0 \rightarrow k = -\frac{25}{7}$$

Página 141

- 1. Dados los vectores $\vec{u}(5, -1, 2)$, $\vec{v}(-1, 2, -2)$, calcula:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ c) $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$

d) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. (Segmento y vector).

e) ¿Cuánto tiene que valer x para que el vector $(7, 2, x)$ sea perpendicular a $\vec{u}$?

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 - 2 - 4 = -11$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{25 + 1 + 4} = \sqrt{30} \approx 5,48$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

c) $\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-11}{\sqrt{30} \cdot 3} \approx -0,669 \rightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 132^\circ 1' 26''$

$$d) \text{ Segmento proyección de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-11}{3} = -3,67$$

Significa que el vector proyección de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$ tiene módulo 3,67 y sentido contrario al de $\vec{v}$.

$$\text{Vector proyección de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} = \frac{-11}{9} (-1, 2, -2)$$

$$\text{Segmento proyección de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{-11}{\sqrt{30}} \approx -2,008$$

$$\text{Vector proyección de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} = \frac{-11}{30} (5, -1, 2)$$

$$e) (5, -1, 2) \cdot (7, 2, x) = 35 - 2 + 2x = 33 + 2x = 0 \rightarrow x = \frac{-33}{2}$$

2. Obtén tres vectores perpendiculares a $\vec{v}$ que no sean paralelos entre sí:

$$\vec{v}(3, 2, 7)$$

Un vector, $\vec{u}(x, y, z)$, es perpendicular a $\vec{v}(3, 2, 7)$ si: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3x + 2y + 7z = 0$

Por ejemplo: $(0, -7, 2)$; $(-7, 0, 3)$; $(-2, 3, 0)$

3. Halla un vector que sea perpendicular a los dos vectores dados:

$$\vec{u}(5, -1, 2) \quad \vec{v}(-1, 2, -2)$$

Queremos hallar las coordenadas de un vector $\vec{w}(x, y, z)$ que sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$:

$$\left. \begin{aligned} \vec{w} \perp \vec{u} &\Rightarrow (5, -1, 2) \cdot (x, y, z) = 5x - y + 2z = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{v} &\Rightarrow (-1, 2, -2) \cdot (x, y, z) = -x + 2y - 2z = 0 \end{aligned} \right\}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones proporcionales. Una de ellas es $x = -2$, $y = 8$, $z = 9$.

Es decir, el vector buscado puede ser $(-2, 8, 9)$ o cualquier otro paralelo a él.

Página 144

1. Halla el producto vectorial de $\vec{u}(3, 7, -6)$ y $\vec{v}(4, 1, -2)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$$

2. Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(3, 7, -6)$ y a $\vec{v}(4, 1, -2)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25) \text{ o cualquier vector proporcional a él.}$$

3. Halla el área del triángulo determinado por los vectores:

$$\vec{u}(3, 7, -6) \text{ y } \vec{v}(4, 1, -2)$$

Área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(3, 7, -6) \times (4, 1, -2)| = |(-8, -18, -25)| = \sqrt{8^2 + 18^2 + 25^2} = \sqrt{1013}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1013}}{2} \approx 15,91 \text{ u}^2$$

Página 145

1. Halla el volumen del paralelepípedo definido por $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ y $\vec{w}(0, 6, 1)$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 53 \rightarrow \text{Volumen} = 53 \text{ u}^3$$

2. Halla el valor de x para que los vectores $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ y $\vec{z}(1, 14, x)$ sean coplanarios (es decir, que el volumen del paralelepípedo determinado por ellos sea cero).

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & 14 & x \end{vmatrix} = 47x = 0 \rightarrow x = 0$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Dependencia lineal

- 1 Dados los vectores $\vec{u}(3, 3, 2)$, $\vec{v}(5, -2, 1)$, $\vec{w}(1, -1, 0)$:

a) Halla los vectores $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$, $-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w}$.

b) Calcula a y b tales que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

$$a) \vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w} = (3, 3, 2) - 2(5, -2, 1) + 3(1, -1, 0) = (-4, 4, 0)$$

$$-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w} = -2(3, 3, 2) + (5, -2, 1) - 4(1, -1, 0) = (-5, -4, -3)$$

$$b) (3, 3, 2) = a(5, -2, 1) + b(1, -1, 0) = (5a + b, -2a - b, a)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 = 5a + b \\ 3 = -2a - b \\ 2 = a \end{array} \right\} \begin{array}{l} b = -7 \\ b = -7 \\ a = 2 \end{array} \quad \text{Solución: } a = 2, \quad b = -7, \text{ es decir: } \vec{u} = 2\vec{v} - 7\vec{w}.$$

- 2 Comprueba que no es posible expresar el vector $\vec{x}(3, -1, 0)$ como combinación lineal de $\vec{u}(1, 2, -1)$ y $\vec{v}(2, -3, 5)$. ¿Son linealmente independientes $\vec{x}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} \rightarrow (3, -1, 0) = a(1, 2, -1) + b(2, -3, 5)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 = a + 2b \\ -1 = 2a - 3b \\ 0 = -a + 5b \end{array} \right\} A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $|A'| = 28 \neq 0$, el sistema es *incompatible*.

Luego no es posible expresar $\vec{x}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Como $\text{ran}(A') = 3$, los tres vectores son linealmente independientes.

- 3 Comprueba que cualquiera de los vectores $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 1, 3)$, $\vec{c}(1, 0, 1)$ puede expresarse como C.L. de los otros dos.

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} \rightarrow (1, 2, 3) = x(2, 1, 3) + y(1, 0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 2x + y \\ 2 = x \\ 3 = 3x + y \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -3 \\ x = 2 \\ y = -3 \end{array} \quad \text{Por tanto: } \vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$$

De aquí, también obtenemos que: $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}$; $\vec{c} = \frac{-1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

s4 Determina m y n para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:

a) $\vec{u}(m, -3, 2), \vec{v}(2, 3, m), \vec{w}(4, 6, -4)$

b) $\vec{u}(3, 2, 5), \vec{v}(2, 4, 7), \vec{w}(1, -1, n)$

$$a) \begin{vmatrix} m & -3 & 2 \\ 2 & 3 & m \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -6m^2 - 24m - 24 = -6(m^2 + 4m + 4) = -6(m+2)^2 = 0 \rightarrow m = -2$$

Si $m = -2$, los vectores son linealmente dependientes.

$$b) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & n \end{vmatrix} = 8n + 5 = 0 \rightarrow n = -\frac{5}{8}$$

Si $n = -\frac{5}{8}$, los vectores son linealmente dependientes.

s5 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base?:

$A = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)\}$

$B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

$C = \{(-3, 2, 1), (1, 2, -1), (1, 0, 1)\}$

$A = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)\}$

Como $(2, 2, 2) = (1, 2, 1) + (1, 0, 1)$, los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, no son una base.

$B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Al ser cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$, son dependientes, luego no son una base.

$C = \{(-3, 2, 1), (1, 2, -1), (1, 0, 1)\}$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{Los vectores son linealmente independientes.}$$

Un conjunto de tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes es una **base** de $\mathbb{R}^3$.

s6 ¿Para qué valores de a el conjunto de vectores $S = \{(1, 1, 1), (a, 1, 1), (1, a, 0)\}$ es una base?

Como son tres vectores de $\mathbb{R}^3$, formarán base cuando sean linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 - a = a(a-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Por tanto, S es una base cuando $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

Producto escalar

- 7** En una base ortonormal tenemos $\vec{a}(1, 2, 2)$ y $\vec{b}(-4, 5, -3)$. Calcula:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$

c) $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$

d) El vector proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 2) \cdot (-4, 5, -3) = -4 + 10 - 6 = 0$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$

c) Como $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 90^\circ$

d) Vector proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ (vector cero)

- 8** Dados los vectores $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + m\vec{k}$ halla m para que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean:

a) Paralelos.

b) Ortogonales.

$\vec{a}(1, m, 1); \vec{b}(-2, 4, m)$

a) $\frac{-2}{1} = \frac{4}{m} = \frac{m}{1} \rightarrow m = -2$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, m, 1) \cdot (-2, 4, m) = -2 + 4m + m = 5m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{2}{5}$

- 9** Halla el vector proyección del vector $\vec{u}(3, 1, 2)$ sobre el vector $\vec{v}(1, -1, 2)$.

Vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$\frac{(3, 1, 2) \cdot (1, -1, 2)}{|(1, -1, 2)|^2} (1, -1, 2) = \frac{3 - 1 + 4}{1^2 + 1^2 + 2^2} (1, -1, 2) = \frac{6}{6} (1, -1, 2) = (1, -1, 2)$$

La proyección es el propio vector $\vec{v}$.

Razonadamente:

Longitud de la proyección:

$$|\vec{u}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} \frac{(3, 1, 2) \cdot (1, -1, 2)}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{3 - 1 + 4}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

El vector proyección se obtiene multiplicando su longitud por un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{v}$: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$\sqrt{6} \cdot \frac{(1, -1, 2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} (1, -1, 2) = (1, -1, 2)$$

- 10** ¿Son $\vec{a}(1, 2, 3)$ y $\vec{b}(2, -2, 1)$ ortogonales? Si no lo son, halla el ángulo que forman.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 3) \cdot (2, -2, 1) = 2 - 4 + 3 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{no son ortogonales.}$$

Si llamamos α al ángulo que forman, entonces:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14} \sqrt{9}} \approx 0,089 \rightarrow \alpha = 84^\circ 53' 20''$$

- 11** Calcula m para que el vector $\vec{a}(1, 3, m)$ sea ortogonal al vector $\vec{b}(1, -2, 3)$.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3, m) \cdot (1, -2, 3) = 1 - 6 + 3m = 3m - 5 = 0 \rightarrow m = \frac{5}{3}$$

- 12** Comprueba que el vector $\vec{u}(1/2, 1/2, 0)$ no es unitario y da las coordenadas de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{u}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1 \rightarrow \vec{u} \text{ no es unitario.}$$

Un vector unitario de la misma dirección que $\vec{u}$ sería:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right). \text{ También podría ser } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$$

Producto vectorial

- 13** Dados $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, comprueba que los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ son opuestos, y halla su módulo.

$$\vec{u}(2, -1, 1); \vec{v}(-1, 3, 2)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-5, -5, 5); \vec{v} \times \vec{u} = (5, 5, -5) = -\vec{u} \times \vec{v}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3} \approx 8,66$$

- 14** Halla el área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{a}(7, -1, 2)$ y $\vec{b}(1, 4, -2)$.

$$\text{Área} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |(-6, 16, 29)| = \sqrt{(-6)^2 + 16^2 + 29^2} = \sqrt{1133} \approx 33,66 \text{ u}^2$$

- 15** Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2, 3, 1)$ y a $\vec{v}(-1, 3, 0)$ y que sea unitario.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3, -1, 9)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{91}$$

Luego el vector que buscamos es: $\left(\frac{-3}{\sqrt{91}}, \frac{-1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}} \right)$

- 16** Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(1, -1, 0)$ y $\vec{v}(2, 0, 1)$ cuyo módulo sea $\sqrt{24}$.

Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ es $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = (-1, -1, 2)$$

Un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ es:

$$\frac{1}{|(-1, -1, 2)|} (-1, -1, 2) = \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, -1, 2)$$

Para que el módulo sea $\sqrt{24}$:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} (-1, -1, 2) = 2(-1, -1, 2) = (-2, -2, 4)$$

El vector $(-2, -2, 4)$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, y su módulo es $\sqrt{24}$.

También cumple estas condiciones su opuesto: $(2, 2, -4)$.

Producto mixto

- 17** Halla el producto mixto de los tres vectores que aparecen en cada caso:

a) $\vec{u}(1, -3, 2), \vec{v}(1, 0, -1), \vec{w}(2, 3, 0)$

b) $\vec{u}(3, 2, 1), \vec{v}(1, -2, 0), \vec{w}(-4, 1, 1)$

c) $\vec{u}(1, 2, -1), \vec{v}(3, 0, 2), \vec{w}(-1, 4, -4)$

Calcula, en cada apartado, el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15$

El paralelepípedo tiene un volumen de $15 u^3$.

b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15$

El paralelepípedo tiene un volumen de $15 u^3$.

$$c) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Los tres vectores no forman un paralelepípedo (los vectores son coplanarios).

- s18** Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(-2, 1, 0)$ y $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Justifica por qué el resultado es $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$.

$$\bullet \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 2, 3) \times (-2, 1, 0) = (-3, -6, 5)$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 70 \rightarrow \text{Volumen} = 70 \text{ u}^3$$

$$\bullet |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{9 + 36 + 25} = \sqrt{70}$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = |\vec{u} \times \vec{v}|^2$$

- 19** Calcula el volumen del tetraedro determinado por los vectores siguientes:

$$\vec{a}(3, -1, 1), \vec{b}(1, 7, 2), \vec{c}(2, 1, -4)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -111 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 111 = 18,5 \text{ u}^3$$

- s20** Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}(2, -3, 1)$, $\vec{v}(1, m, 3)$ y $\vec{w}(-4, 5, -1)$ sean coplanarios.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2m + 8 = 0 \rightarrow m = -4$$

Página 150

PARA RESOLVER

- s21** Prueba que los vectores $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$, $(0, 0, 1)$ son linealmente independientes cualesquiera que sean a , b y c .

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ para cualquier valor de } a, b, c.$$

Por tanto, son linealmente independientes.

- 22** Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, -1)$ y $\vec{b}(1, 3, 0)$, comprueba que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a} + \vec{b}$ y a $\vec{a} - \vec{b}$.

$$\vec{a}(1, 2, -1)$$

$$\vec{b}(1, 3, 0)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (2, 5, -1)$$

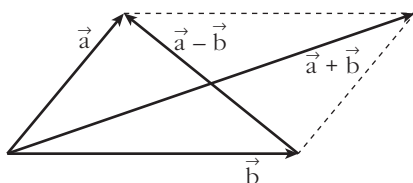
$$\vec{a} - \vec{b} = (0, -1, -1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3, -1, 1)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (2, 5, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0. \text{ Por tanto, } \vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (0, -1, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0. \text{ Por tanto, } \vec{a} - \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$

Hasta aquí, la comprobación rutinaria, numérica. Más interesante es la siguiente reflexión:



Los vectores $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son las diagonales del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por tanto, están en el plano definido por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Y el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a dicho plano.

Así, $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son perpendiculares a $\vec{a} \times \vec{b}$.

- 23** a) Comprueba que el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}(3, -2, 1)$ y $\vec{v}(4, 3, -6)$ es un rectángulo.

b) Halla su área multiplicando la base por la altura y comprueba que obtienes el mismo resultado si hallas $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2, 1) \cdot (4, 3, -6) = 12 - 6 - 6 = 0$. Luego $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, y el paralelogramo es un rectángulo.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Base} = |\vec{u}| = \sqrt{14} \\ \text{Altura} = |\vec{v}| = \sqrt{61} \end{array} \right\} \text{Área} = \sqrt{854} \approx 29,22 \text{ u}^2$$

Por otra parte:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(9, 22, 17)| = \sqrt{854} \approx 29,22 \text{ u}^2$$

- 24** Dado el vector $\vec{v}(-2, 2, -4)$, halla las coordenadas de los siguientes vectores:

a) Unitario y perpendicular a $\vec{v}$. b) Paralelos a $\vec{v}$ y de módulo 6.

a) $\vec{u}(x, y, z)$ ha de cumplir $-2x + 2y - 4z = 0$ y ser unitario.

$$\text{Por ejemplo, } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$$

b) $(-\sqrt{6}, \sqrt{6}, -2\sqrt{6})$ y $(\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$

- 25** Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(2, 3, -1)$ y a $\vec{v}(1, 4, 2)$ cuya tercera componente sea 1.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (10, -5, 5) \quad // \quad (2, -1, 1)$$

El vector que buscamos es $(2, -1, 1)$.

- s26** Dados los vectores $\vec{u}_1(2, 0, 0)$, $\vec{u}_2(0, 1, -3)$, $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$, ¿qué relación deben cumplir a y b para que $\vec{u}_3$ sea ortogonal al vector $\vec{v}(1, 1, 1)$?

$$\vec{u}_3 = a(2, 0, 0) + b(0, 1, -3) = (2a, b, -3b)$$

Para que $\vec{u}_3$ sea perpendicular a $\vec{v}$ ha de ser:

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{v} = (2a, b, -3b) \cdot (1, 1, 1) = 2a + b - 3b = 2a - 2b = 0, \text{ es decir, } a = b.$$

- s27** Calcula las coordenadas de un vector $\vec{u}$ que sea ortogonal a $\vec{v}(1, 2, 3)$ y $\vec{w}(1, -1, 1)$ y tal que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$.

$$\vec{v} \times \vec{w} = (5, 2, -3)$$

Un vector ortogonal a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$ es de la forma $(5k, 2k, -3k)$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 5k & 2k & -3k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot 38 = 19 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\text{Por tanto: } \vec{u} \left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{3}{2} \right)$$

- s28** a) Obtén λ para que los siguientes vectores sean linealmente dependientes:

$$\vec{u}_1 = (3, 2, 5), \quad \vec{u}_2 = (2, 4, 7), \quad \vec{u}_3 = (1, -3, \lambda)$$

- b) Para $\lambda = 3$, expresa el vector $\vec{v} = (7, 11, 14)$ como combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 8\lambda + 27 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{27}{8}$$

- b) Para $\lambda = 3$, tenemos que: $\vec{u}_1(3, 2, 5)$; $\vec{u}_2(2, 4, 7)$; $\vec{u}_3(1, -3, 3)$

Expresamos $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$:

$$(7, 11, 14) = a(3, 2, 5) + b(2, 4, 7) + c(1, -3, 3)$$

$$\left. \begin{aligned} 3a + 2b + c &= 7 \\ 2a + 4b - 3c &= 11 \\ 5a + 7b + 3c &= 14 \end{aligned} \right\} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 51$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 11 & 4 & -3 \\ 14 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{102}{51} = 2; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 11 & -3 \\ 5 & 14 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{51}{51} = 1;$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 11 \\ 5 & 7 & 14 \end{vmatrix}}{51} = \frac{-51}{51} = -1$$

Por tanto: $\vec{v} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3$

s29 a) Determina los valores de a para los que resultan linealmente dependientes los vectores $(-2, a, a)$, $(a, -2, a)$ y $(a, a, -2)$.

b) Obtén en esos casos una relación de dependencia entre los vectores.

$$a) \begin{vmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{vmatrix} = 2a^3 + 6a^2 - 8 = 2(a-1)(a+2)^2 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Para $a = 1$ y para $a = -2$, los tres vectores dados son linealmente dependientes.

b) Para $a = 1$, queda: $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(1, 1, -2)$, y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, 1, 1) - 1 \cdot (1, -2, 1) = (1, 1, -2)$$

Para $a = -2$, queda: $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$, y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, -2, -2) + 0 \cdot (-2, -2, -2) = (-2, -2, -2)$$

s30 Dados los vectores $\vec{u}(1, -1, 2)$ y $\vec{v}(3, 1, -1)$, halla el conjunto de vectores que, siendo perpendiculares a $\vec{u}$, sean coplanarios con $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Sea $\vec{w}(x, y, z)$ un vector tal que:

1.º Es perpendicular a $\vec{u}$, es decir:

$$(x, y, z) \cdot (1, -1, 2) = x - y + 2z = 0$$

2.º Es coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -x + 7y + 4z = 0$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 2z = 0 \\ -x + 7y + 4z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 2z = y \\ -x + 4z = -7y \end{array} \quad \text{Sumando:} \quad \begin{array}{l} 6z = -6y \rightarrow z = -y \\ x = y - 2z = y + 2y = 3y \end{array}$$

Soluciones: $(3\lambda, \lambda, -\lambda) \quad \lambda \neq 0$

s31 Dados los vectores $\vec{u}(a, 1+a, 2a)$, $\vec{v}(a, 1, a)$ y $\vec{w}(1, a, 1)$, se pide:

a) Halla los valores de a para los que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

b) Estudia si el vector $\vec{c}(3, 3, 0)$ depende linealmente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a = 2$.

c) Justifica razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$.

$$a) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a = a(a^2 - 1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

b) Para $a = 2$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes. Como son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes, forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Así, cualquier otro vector, y, en particular $\vec{c}(3, 3, 0)$, depende linealmente de ellos.

Obtenemos la combinación lineal:

Para $a = 2$, tenemos que: $\vec{u}(2, 3, 4)$, $\vec{v}(2, 1, 2)$, $\vec{w}(1, 2, 1)$

$$(3, 3, 0) = x(2, 3, 4) + y(2, 1, 2) + z(1, 2, 1)$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Por tanto:

$$\vec{c} = \frac{-3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} + 3\vec{w}$$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ para $a = 0$. Está probado en el apartado a).

- s32** a) Halla el número de vectores linealmente independientes que hay en el conjunto $S = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (2, 0, -3), (-1, 1, 2)\}$.
- b) Un vector no nulo tiene sus tres componentes iguales. ¿Puede escribirse como combinación lineal de los dos primeros vectores de S ?
- c) Determina un vector que, teniendo sus dos primeras componentes iguales a 1, se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S .

a) Tenemos que hallar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \quad \text{ran}(M) = 3.$$

Por tanto, hay tres vectores linealmente independientes en S .

- b) Sí. Si tiene sus tres componentes iguales y es no nulo, es de la forma: $\vec{u} = (k, k, k)$ con $k \neq 0$. Entonces, podemos obtenerlo a partir de los dos primeros vectores de S como sigue:

$$\vec{u} = k \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 1)$$

- c) Sea $\vec{v}(1, 1, x)$ el vector que buscamos. Para que se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S , tenemos que:

$$(1, 1, x) = a(0, 2, 1) + b(2, 0, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2b = 1 \\ 2a = 1 \\ a - 3b = x \end{array} \right\} \quad \text{Debe tener solución:} \quad b = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = x \rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow x = -1$$

Por tanto, el vector es $\vec{v}(1, 1, -1)$.

- s33** Halla un vector $\vec{u}$ de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$ y tal que determine con el vector $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área 25 u^2 .

Si $\vec{u}$ es de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$, será de la forma $\vec{u}(x, -2x, 3x)$, con $x \neq 0$.

Para que forme con $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área 25 u^2 , ha de ser:

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = |(-10x, -5x, 0)| = \sqrt{100x^2 + 25x^2} = |x|\sqrt{125} = 25;$$

$$\text{es decir: } 125x^2 = 625 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

Por tanto, hay dos soluciones: $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$

s34 Halla un vector $\vec{v}$ coplanario con $\vec{a}(2, -1, 1)$ y $\vec{b}(1, 0, 3)$ y ortogonal a $\vec{c}(2, 3, 0)$.

Sea $\vec{v}(x, y, z)$ tal que:

1.º es coplanario con $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es decir:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3x - 5y + z = 0$$

2.º es ortogonal a $\vec{c}$, es decir: $(x, y, z) \cdot (2, 3, 0) = 2x + 3y = 0$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} -3x - 5y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + z = 5y \\ 2x = -3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 5y + 3x = 5y - \frac{9}{2}y = \frac{1}{2}y \\ x = -\frac{3}{2}y \end{cases}$$

Soluciones: $(-3\lambda, 2\lambda, \lambda)$ ($\lambda \neq 0$)

Todos los vectores de esta forma cumplen las condiciones. Por ejemplo, para $\lambda = 1$, tenemos el vector $(-3, 2, 1)$.

s35 Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = 4$ y $|\vec{b}| = 2$, con $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 60^\circ$.

Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \\ &= 16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 16 + 4 + 8 = 28 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \\ &= 16 + 4 - 8 = 12 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

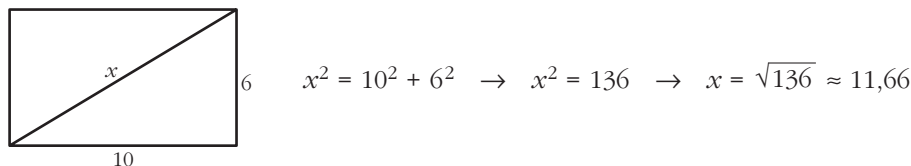
s36 De dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que son ortogonales y que $|\vec{u}| = 6$ y $|\vec{v}| = 10$.
Halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Así:

$$\begin{aligned} |\vec{u} + \vec{v}|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \\ &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 0 = 36 + 100 = 136 \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11,66 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{u} - \vec{v}|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 136 \rightarrow \\ &\rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11,66 \end{aligned}$$

Observación: Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces forman los lados de un rectángulo con base y altura $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$. En este caso, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son sus diagonales, que tienen el mismo módulo (por tratarse de un rectángulo). Además, para hallar la longitud de la diagonal, podemos aplicar en este caso el teorema de Pitágoras:



s37 Calcula el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabiendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ y $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$.

Puesto que $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, empecemos desarrollando esta expresión:

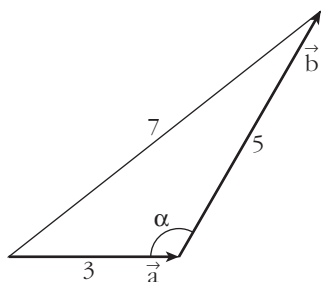
$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

Sustituimos $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$ por sus valores, y $\vec{a} \cdot \vec{b}$ por su expresión, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$:

$$7^2 = 3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{1}{2} \rightarrow \widehat{\vec{a}, \vec{b}} = 60^\circ$$

Veamos otra forma de resolverlo, basada en la resolución de triángulos aprendida en 1.º de Bachillerato:

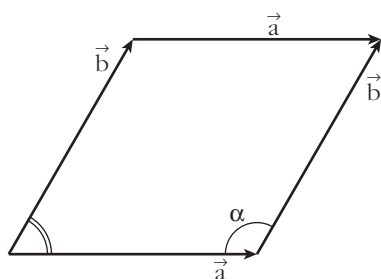


Aplicamos el teorema del coseno a este triángulo:

$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos \alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \alpha = \frac{7^2 - 3^2 - 5^2}{-2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 120^\circ$$

Observamos que el ángulo buscado es el suplementario de α :



$$\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

- 38** De los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que cumplen $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$, $2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b}$, siendo $\vec{a}(2, -1, 0)$ y $\vec{b}(1, 3, -1)$. Halla el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3\vec{u} + 3\vec{v} = 3\vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} \\ -2\vec{u} + 3\vec{v} = -\vec{b} \end{array}$$

$$\frac{5\vec{u}}{5\vec{v}} = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{2\vec{a} - \vec{b}}$$

El ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coincide con el ángulo formado por $\vec{u}' = 5\vec{u}$ y $\vec{v}' = 5\vec{v}$:

$$\vec{u}' = (7, 0, -1); \quad \vec{v}' = (3, -5, 1)$$

$$\vec{u}' \cdot \vec{v}' = 20$$

$$|\vec{u}'| = \sqrt{50}; \quad |\vec{v}'| = \sqrt{35}$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}', \vec{v}'}) = \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}'}{|\vec{u}'| |\vec{v}'|} = \frac{20}{\sqrt{50} \sqrt{35}} = 0,4781$$

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}', \vec{v}'}) = 61^\circ 26' 21''$$

- 39** Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cumplen las siguientes condiciones:

$$|\vec{u}| = 5, \quad |\vec{v}| = 4, \quad |\vec{w}| = 7, \quad \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

Desarrolla el siguiente producto escalar:

$$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

Desarrollando el producto escalar indicado:

$$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 2(\vec{u} \cdot \vec{w}) + 2(\vec{v} \cdot \vec{w})$$

$$\text{Por otra parte: } (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$$

$$\text{Así: } 5^2 + 4^2 + 7^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{90}{2} = -45$$

Página 151

CUESTIONES TEÓRICAS

- 40** Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, ¿podemos asegurar que $\vec{v} = \vec{w}$?

No. Por ejemplo, si $\vec{u}(3, -2, 0)$, $\vec{v}(5, 1, 0)$ y $\vec{w}(7, 4, 0)$, tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 15 - 2 = 13 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 21 - 8 = 13 \end{array} \right\} \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Sin embargo, $\vec{v} \neq \vec{w}$.

- 41** Prueba, utilizando el producto escalar, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$ entonces $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

Para demostrar que $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$, tenemos que probar que su producto escalar es cero:

$$\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m\vec{a} \cdot \vec{b} + n\vec{a} \cdot \vec{c} = m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0$$

Por tanto, $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.

- 42** Demuestra que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores no nulos que tienen el mismo módulo, entonces $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son ortogonales.

Supongamos que $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$, entonces:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0 \quad (\text{pues } |\vec{a}| = |\vec{b}|)$$

Observación: Si recordamos que $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son las diagonales del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, hemos probado que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

- 43** a) ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$?
b) Si dos vectores verifican $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$, ¿qué puedes decir del ángulo que forman?

$$a) \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \cdot 2 \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2 \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{3}{2} > 1 \text{ Imposible.}$$

Luego no existen dos vectores que cumplan estas condiciones.

$$b) \text{ Si } |\vec{u}||\vec{v}| = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \rightarrow |\vec{u}||\vec{v}| = \begin{cases} +|\vec{u}||\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \\ -|\vec{u}||\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} |\vec{u}||\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \rightarrow \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 0^\circ \\ |\vec{u}||\vec{v}| = -|\vec{u}||\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -1 \rightarrow \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 180^\circ \end{cases}$$

Por tanto, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

- 44** Justifica por qué el producto mixto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} + \vec{b}$ es igual a 0 cualesquiera que sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} + \vec{b}$ son coplanarios; luego el volumen del paralelepípedo determinado por ellos (que coincide con su producto mixto en valor absoluto) es cero.

45 Dados los vectores $\vec{a}(1, -2, 3)$, $\vec{b}(3, 1, 1)$, $\vec{c}(-2, 0, 1)$, comprueba que:

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, 1, 2) = (-7, 1, 3)$

$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = (-5, 8, 7) + (-2, -7, -4) = (-7, 1, 3)$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (-5, 8, 7) \times (-2, 0, 1) = (8, -9, 16)$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, -5, 2) = (11, 1, -3)$

46 Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, ¿es $\vec{b} = \vec{c}$ necesariamente? Pon ejemplos.

No. Por ejemplo, si consideramos $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 4, 6)$ y $\vec{c}(3, 6, 9)$, entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}, \text{ pero } \vec{b} \neq \vec{c}.$$

47 Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tres vectores linealmente independientes. Indica razonadamente cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos valen 0:

$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}]$, $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}]$, $[\vec{a} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}]$

Puesto que $\vec{a}$, $\vec{b}$, y $\vec{c}$ son L.I., los tomamos como base. Por tanto:

$\vec{a} + \vec{c} = (1, 0, 1)$; $\vec{a} - \vec{c} = (1, 0, -1)$; $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (1, 1, 1)$

$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Son L.I.

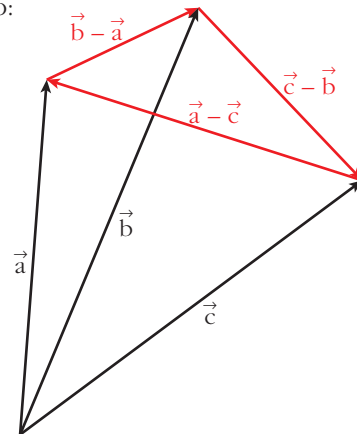
Análogamente:

$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Son L.I.

$[\vec{a} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Son L.D.

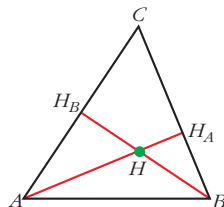
Interpretación geométrica de este último resultado:

Los vectores $\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$ son los lados del triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ cuando los situamos con origen común. Por tanto, $\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{b}$ y $\vec{b} - \vec{a}$ son coplanarios.



PARA PROFUNDIZAR

48 “Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto”.



Para demostrarlo, llamamos H al punto en que se cortan dos alturas, AH_A y BH_B . Da los pasos que se indican a continuación:

a) Justifica que
$$\begin{cases} \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0 \\ \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0 \end{cases}$$

b) De las igualdades anteriores se llega a:

$$\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$$

y de aquí se concluye que $\vec{HC} \perp \vec{AB}$ y, por tanto, que las tres alturas se cortan en H . (Justifica las afirmaciones anteriores).

a) $\vec{HC} - \vec{HB} = \vec{BC}$; y, como AH_A es la altura correspondiente al lado BC , entonces:

$$\vec{BC} \perp \vec{AH_A} \rightarrow \vec{BC} \perp \vec{HA} \rightarrow \vec{HA} \cdot \vec{BC} = 0 \rightarrow \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0$$

Análogamente, como $\vec{HC} - \vec{HA} = \vec{AC}$, tenemos que: $\vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0$

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) &= \vec{HC} \cdot \vec{HB} - \vec{HC} \cdot \vec{HA} = \vec{HB} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HC} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \vec{HB} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HB} = \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) \stackrel{(2)}{=} 0 \end{aligned}$$

$$(1) \vec{HA} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HB} = 0 \rightarrow \vec{HA} \cdot \vec{HC} = \vec{HA} \cdot \vec{HB}$$

$$(2) \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0$$

Por tanto, si $\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$, como $\vec{HB} - \vec{HA} = \vec{AB}$, entonces $\vec{HC} \perp \vec{AB}$; luego H también pertenece a la altura correspondiente al vértice C . Así, las tres alturas se cortan en el mismo punto, H .

AUTOEVALUACIÓN

1. a) Halla el valor de m para el cual $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(0, 1, 2)$ y $\vec{w}(-1, m, 3)$ son linealmente dependientes.

b) Obtén, en este caso, una relación de dependencia entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

- a) Para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean L.D., el rango de la matriz que forman ha de ser menor que 3. Así:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & m & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M| = -2 - 2m = 0 \rightarrow m = -1$$

Si $m = -1$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son L.D.

- b) Sea $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \rightarrow (1, 2, -1) = \alpha(0, 1, 2) + \beta(-1, -1, 3) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 = -\beta \\ 2 = \alpha - \beta \\ -1 = 2\alpha + 3\beta \end{cases} \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\text{Así, } \vec{u} = \vec{v} - \vec{w}.$$

2. $\vec{u}(3, -2, \sqrt{3})$, $\vec{v}(4, -2, -4)$. Halla $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ y el vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

$$\bullet |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 4 + 3} = \sqrt{16} = 4$$

$$\bullet |\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

$$\begin{aligned} \bullet \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) + (-4) \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 6} = \\ &= \frac{12 + 4 - 4\sqrt{3}}{24} = \frac{16 - 4\sqrt{3}}{24} = \frac{4 - \sqrt{3}}{6} = 0,3780 \end{aligned}$$

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \arccos(0,3780) = 67^\circ 47' 26''$$

- Vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} = \frac{16 - 4\sqrt{3}}{16} (4, -2, -4) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) (4, -2, -4)$$

3. Dados los vectores $\vec{u}(3, -4, 0)$ y $\vec{v}(m, 0, 7)$:

a) Halla m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Halla un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

c) Obtén tres vectores unitarios. $\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{w}'$, que tengan, respectivamente, la misma dirección que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

d) ¿Forman $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ y $\vec{w}'$ una base ortonormal?

a) Como $|\vec{u}| \neq 0$ y $|\vec{v}| \neq 0$, $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3m + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot 7 = 3m = 0 \rightarrow m = 0$$

Así, $\vec{v}(0, 0, 7)$.

b) $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

$$\vec{w} = (3, -4, 0) \times (0, 0, 7) = (-28, -21, 0)$$

c) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

$$|\vec{v}| = 7$$

$$|\vec{w}| = 7\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2} = 7\sqrt{25} = 7 \cdot 5 = 35$$

Sean:

$$\vec{u}' = \frac{1}{5}(3, -4, 0)$$

$$\vec{u}'\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}, 0\right) // \vec{u}$$

$$\vec{v}' = \frac{1}{7}(0, 0, 7)$$

$$\vec{v}'(0, 0, 1) // \vec{v}$$

$$\vec{w}' = \frac{1}{35}(-28, -21, 0)$$

$$\vec{w}'\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right) // \vec{w}$$

$\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{w}'$ tienen módulo 1.

d) $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ no son coplanarios al ser perpendiculares entre sí. Por tanto, forman una base.

Por ser perpendiculares entre sí y, además, unitarios, la base $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ es ortonormal.

4. Halla el área del triángulo determinado por los vectores $\vec{u}(5, -1, 3)$ y $\vec{v}(4, 0, 7)$.

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} |(-7, -23, 4)| = \frac{1}{2} \sqrt{(-7)^2 + (-23)^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{594} = 12,2 \text{ u}^2$$

5. Halla el volumen del tetraedro determinado por los vectores:

$$\vec{u}(5, -1, 3), \vec{v}(4, 0, 7), \vec{w}(-2, 6, 3)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \text{valor absoluto de } \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-112| = \frac{56}{3} = 18,7 \text{ u}^3$$

6. Halla un vector de módulo 10 que sea perpendicular a $(3, -1, 0)$ y forme un ángulo de 60° con $(0, 0, 1)$.

Llamamos (x, y, z) al vector buscado:

- Su módulo es 10 $\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 10 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 100$
- Es perpendicular a $(3, -1, 0) \rightarrow 3x - y = 0$
- Forma un ángulo de 60° con $(0, 0, 1) \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{(0, 0, 1) \cdot (x, y, z)}{|(0, 0, 1)| \cdot |(x, y, z)|} = \cos 60^\circ \rightarrow \frac{z}{1 \cdot 10} = \frac{1}{2} \rightarrow 2z = 10 \rightarrow z = 5$$

Así:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 100 \\ 3x - y = 0 \\ z = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 100 \\ y = 3x \\ z = 5 \end{array}$$

Sustituyendo la 3.ª y 2.ª ecuación en la 1.ª:

$$x^2 + 9x^2 + 25 = 100 \rightarrow 10x^2 = 75 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{15}{2}}$$

Soluciones: $\left(\sqrt{\frac{15}{2}}, 3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{15}{2}}, -3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5\right)$