

Continuidad en un punto:

Se dice que una función f es continua en un punto de abscisa $x=a$ si:

- Existe $f(a)$
- Existe (y es finito) el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- El límite anterior coincide con el valor de la función

Tipos de discontinuidades:

Evitable: la función es discontinua en a pero existe el límite en dicho punto

De salto finito: los dos límites laterales son finitos pero distintos

De salto infinito: uno de los dos límites laterales, o ambos, son infinitos, o bien carece de límites laterales.

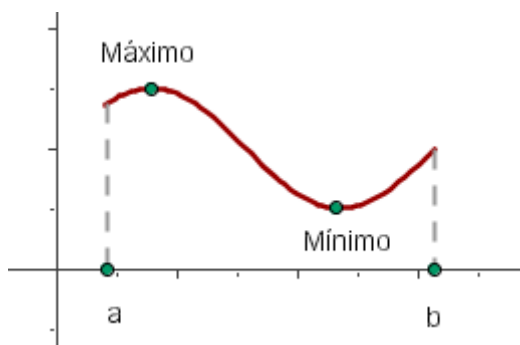
Teorema de Weierstrass:

Si una función $f(x)$ está definida y es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f(x)$ alcanza al menos un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo $[a, b]$.

Interpretación geométrica:

Hay al menos dos puntos x_1, x_2 pertenecientes a $[a, b]$ donde f alcanza valores extremos absolutos:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{si } x \in [a, b]$$



El teorema de Weierstrass no nos indica donde se encuentra el máximo y el mínimo, sólo afirma que existen.

Teorema de Bolzano:

Si una función $f(x)$ está definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y es:

1º) $f(x)$ continua en $[a, b]$.

2º) Toma valores de distinto signo en a y en b .

Entonces, existe al menos un punto c del intervalo abierto (a, b) tal que $f(c)=0$.

Interpretación geométrica:

Existe un punto del interior del intervalo en el que la función corta al eje X .

Derivada de una función en un punto:

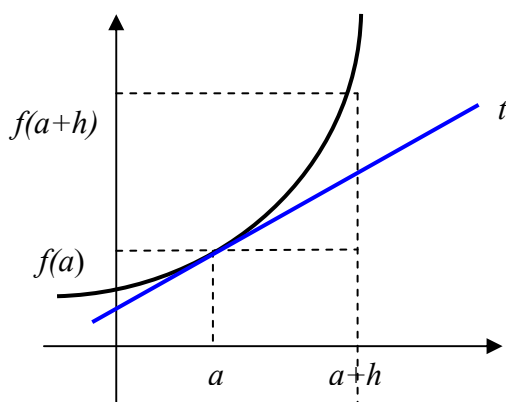
Se llama derivada de la función f en el punto a , y se designa por $f'(a)$, al

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ si existe y es finito.

Si existe $f'(a)$, se dice que f es derivable en a .

Interpretación geométrica:

La derivada de la función f en el punto a , $f'(a)$, coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y=f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.



$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivadas laterales:

Se llama derivada por la izquierda de f en a , $f'(a^-)$, al valor del límite:

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se llama derivada por la derecha de f en a , $f'(a^+)$, al valor del límite:

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

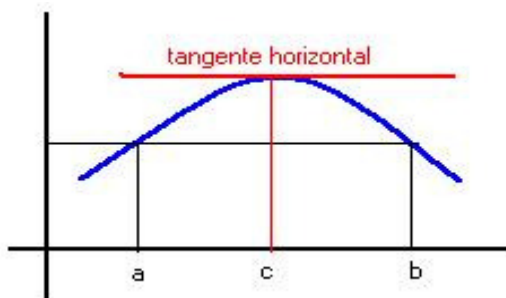
Teorema de Rolle:

Sea f una función que verifica las siguientes hipótesis:

- a) Es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
- b) Es derivable en el intervalo abierto (a, b)
- c) Toma el mismo valor en los extremos del intervalo, es decir $f(a) = f(b)$

Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Interpretación geométrica: Existe un punto en la curva cuya tangente es horizontal (paralela al eje X)



Teorema de Rolle

Hipótesis:

f es continua en $[a, b]$

f es derivable en (a, b)

$f(a) = f(b)$

Tesis:

$\exists c \in (a, b) / f'(c) = 0$

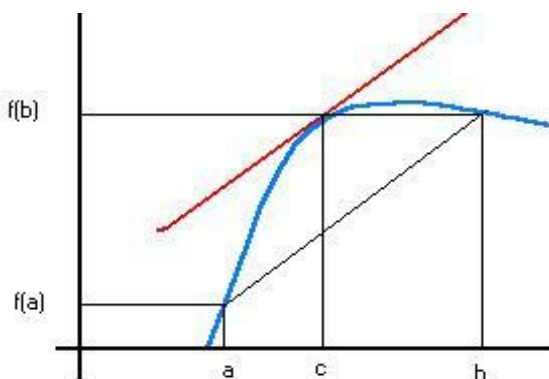
Teorema del valor medio del cálculo diferencial, Teorema de Lagrange o Teorema de los incrementos finitos:

Sea f una función que verifica las siguientes hipótesis:

- Es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
- Es derivable en el intervalo abierto (a, b)

Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Interpretación geométrica: Existe un punto en la curva cuya tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Teorema del Valor Medio

Hipótesis:

f es continua en $[a, b]$

f es derivable en (a, b)

Tesis:

$\exists c \in (a, b) / \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Teorema de Cauchy:

Si f y g son dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , existe un punto c en

$$(a, b) \text{ tal que } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ejemplo:

Halla el valor de c del intervalo $(1, 4)$ donde se cumple la tesis del teorema de Cauchy, siendo $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = x^2 + 1$

Las funciones son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$ por ser funciones polinómicas

$$f'(x) = 3; \quad f'(c) = 3$$

$$g'(x) = 2x; \quad g'(c) = 2c$$

Valores de las funciones en los extremos del intervalo:

$$f(1) = 5; \quad f(4) = 14$$

$$g(1) = 2; \quad g(4) = 17$$

$$\text{luego } \frac{14 - 5}{17 - 2} = \frac{3}{2c} \Rightarrow \frac{9}{15} = \frac{3}{2c} \Rightarrow 18c = 45 \Rightarrow c = \frac{45}{18} = \frac{5}{2}; \quad \frac{5}{2} \in (1, 4)$$

Regla de L'Hôpital:

Es una consecuencia del teorema de Cauchy y nos permite obtener fácilmente ciertos límites que, sin esta regla, resultarían complicadísimos.

Esta regla dice:

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regla de L'Hôpital también puede ser aplicada al caso de indeterminaciones del tipo

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Este es un caso de indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ por lo que podemos aplicar la regla:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

La regla puede aplicarse una o más veces, mientras se mantenga la indeterminación.