

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

a. **Dominio de definición:** $D = \text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{existe } f(x)\}$

b. **Puntos de corte con los ejes:**

- ♦ Con el eje OX (abscisas): $f(x) = 0 : (x,0)$. Ninguno, uno o más puntos.
- ♦ Con el eje OY (ordenadas): $f(0) = y$, $(0,y)$. Ninguno o un punto.

c. **Asíntotas**

- Asíntotas verticales: La recta $x = a$ es asíntota vertical si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, o algún límite lateral lo es.
- Asíntotas horizontales: La recta $y = b$ es asíntota horizontal si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ o bien $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$.
- Asíntotas oblicuas: La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua, cuando:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \text{ y } n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) \in \mathbb{R}$$

d. **Crecimiento, decrecimiento. Extremos relativos**

- Si para todo $x \in I \subseteq D$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es **creciente** en I .
- Si para todo $x \in I \subseteq D$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es **decreciente** en I .
- Si $f'(x_0) = 0$, o bien f no es derivable en $x_0 \in D$, y $f'(x)$ cambia de signo a izquierda y derecha de x_0 , en x_0 hay un **extremo relativo**.

Representación gráfica de funciones

1. $f(x) = x^2 - x^4$

a) **Dominio:** $\mathbb{R}$, es continua y derivable en $\mathbb{R}$

b) **Puntos de corte con los ejes**

i) $x = 0 \Rightarrow y = 0, (0, 0)$

ii) $y = 0 \Rightarrow x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(1 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (0, 0) \\ x = \pm 1 & (1, 0), (-1, 0) \end{cases}$

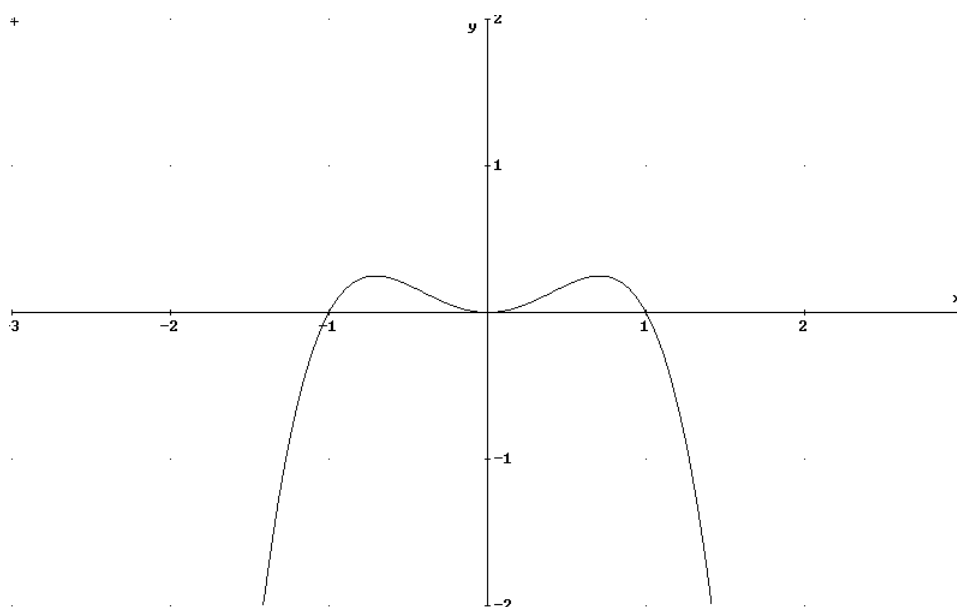
c) **Asíntotas:** No tiene por ser una función polinómica.

d) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:**

$$y' = 2x - 4x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{1/2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

Signo f'	+		-		+		-
f es:	Creciente	$-\sqrt{2}/2$	Decreciente	0	Creciente	$\sqrt{2}/2$	Decreciente
		Máx.		Mín.		Máx.	

Mínimo relativo en el punto $(0,0)$, y máximos relativos en los puntos $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$



2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

a) **Dominio:** $\mathbb{R}$, es continua y derivable en $\mathbb{R}$

b) **Puntos de corte con los ejes**

i) $x = 0 \Rightarrow y = 0, (0,0)$

ii) $y = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (0, 0) \\ x = 3 & (3, 0) \end{cases}$

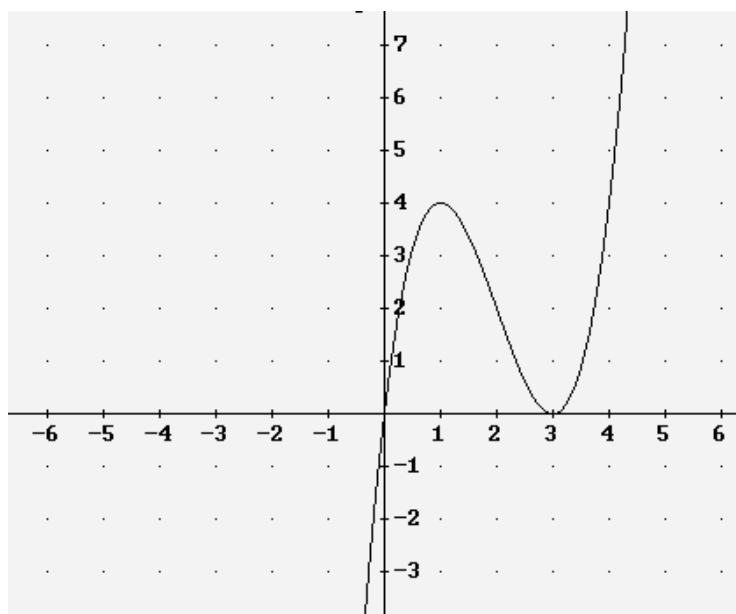
c) **Asíntotas:** No tiene por ser una función polinómica.

d) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:**

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^3 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Signo f'	+		-		+
f es:	Creciente	1	Decreciente	3	Creciente
		Máx.		Mín.	

La función tiene un mínimo relativo en el punto: $(1, 4)$,
y un máximo relativo en el punto $(3, 0)$



3. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

a) **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

b) **Puntos de corte con los ejes:** no tiene.

c) **Asíntotas**

i) Asíntotas verticales: $x = 0$

ii) Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \pm\infty$. No tiene

iii) Asíntotas oblicuas: $y = x$

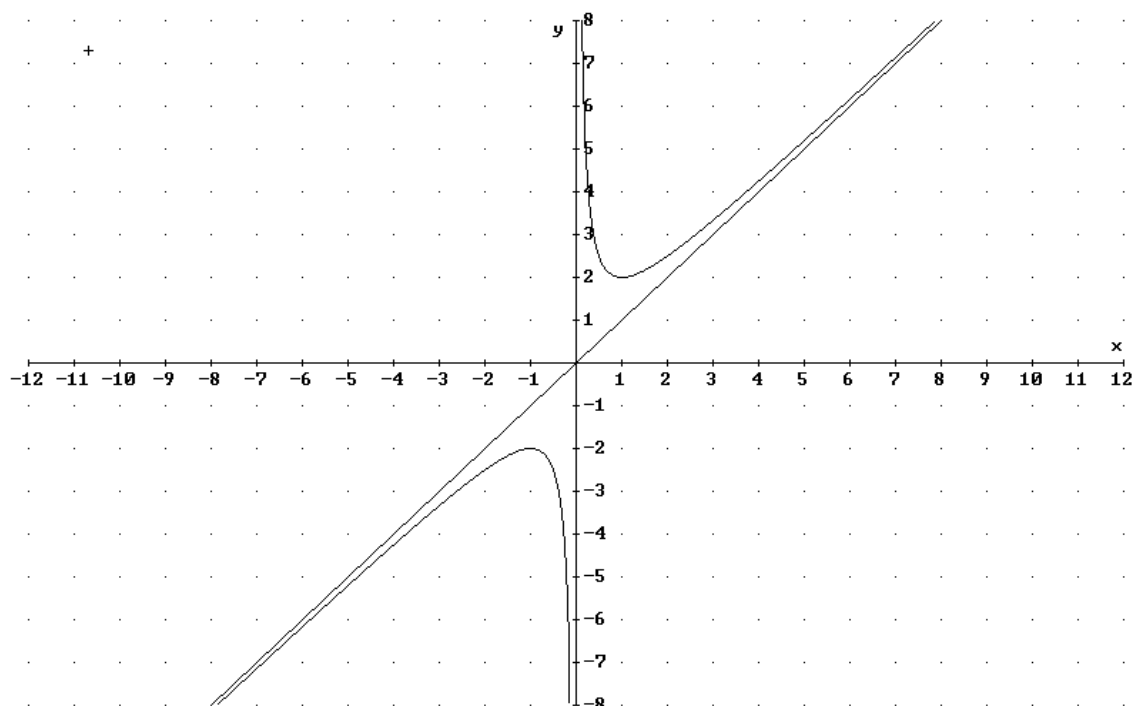
d) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:**

$$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Signo f'	+	-	-	+
f es:	crece	decrece	decrece	crece
		Máximo		mínimo

Tiene un máximo en el punto: $(-1, 2)$ y un mínimo en $(1, 2)$

g) **Gráfica:**



4. $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$

a) **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

b) **Puntos de corte con los ejes:** $(0, 0)$.

c) **Asíntotas**

i) Asíntotas verticales:
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{(1+x)^2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{(1+x)^2} = -\infty \end{array} \right\} x = -1$$

ii) Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} = +\infty$. No tiene

iii) Asíntotas oblicuas: $m=1 \rightarrow y = x - 2$

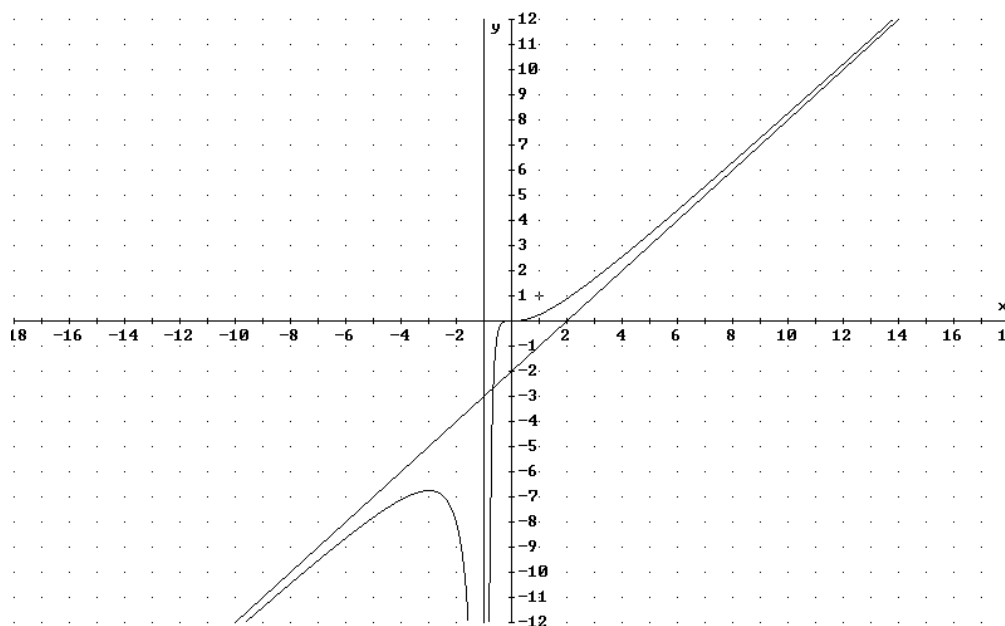
d) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:**

$y' = \frac{x^3 + 3x^2}{(1+x)^3} = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \end{cases}$. Dom $f'(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Signo f'	+	-	+	+
f es:	crece	decrece	crece	crece
		Máximo	No def.	

Tiene un máximo en el punto: $(-3, -27/4)$

h) **Gráfica:**



5. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

a) **Dominio:** $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$

b) **Puntos de corte con los ejes:** $(0, 0)$.

c) **Simetrías:** $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 4} = \frac{-x}{x^2 - 4} = -f(x) \Rightarrow$ impar, simétrica respecto del origen

d) **Asíntotas**

i) Asíntotas verticales: $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = -2$ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2$

ii) Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow y = 0$

iii) Asíntotas oblicuas: No tiene

e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:**

$y' = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$. No tiene

Signo f'		-		-		-
f es:		Decrece	-2	Decrece	2	Decrece

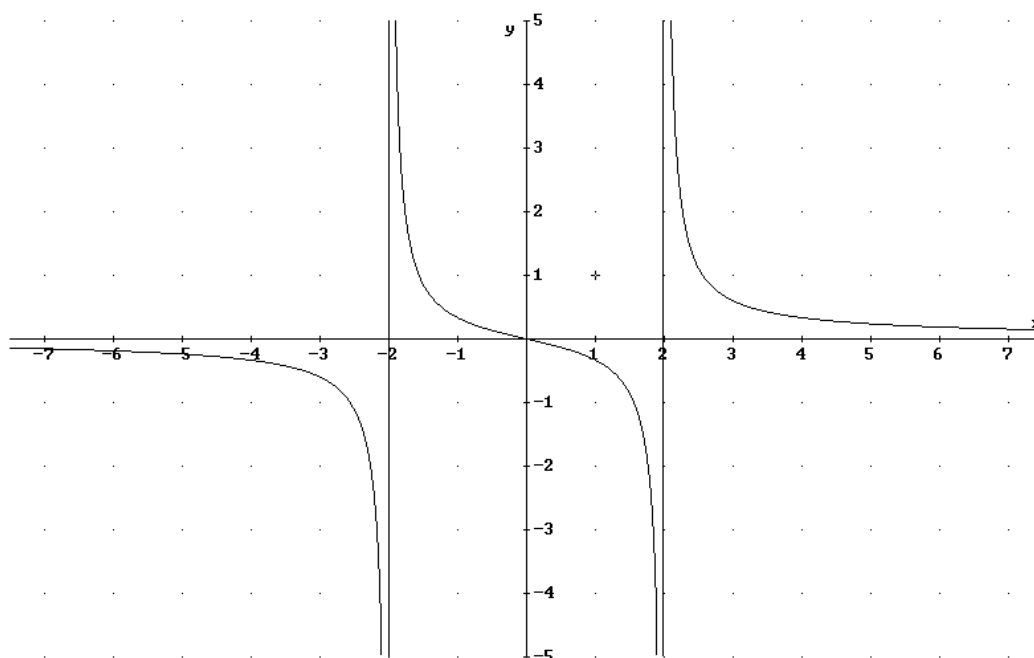
f) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión:**

$y'' = \frac{2x^3 + 24x}{(x^2 - 4)^3} = 0 \Rightarrow 2x(x^2 + 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-12} \notin \mathbb{R} \end{cases}$

Signo f''		-		+		-		+
f es:		Convexa	-2	Cóncava	0	Convexa	2	Cóncava
				Punto de inflexión				

Tiene un punto de inflexión en el punto $(0, 0)$

i) **Gráfica:**



6. $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$

a) **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

b) **Puntos de corte con los ejes:**

i) $x = 0$ no definida ($0 \notin \text{Dom } f$)

ii) $y = 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = -1 (-1, 0), x = 2 (2, 0)$

c) **Simetrías:** $f(-x) = \frac{(-x)^3 - 3(-x)^2 + 4}{(-x)^2} \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ no tiene.

d) **Asíntotas**

i) Asíntotas verticales: $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0$

ii) Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = \pm\infty \Rightarrow$ no tiene

iii) Asíntotas oblicuas: $y = x - 3$

e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:**

$$y' = \frac{x^3 - 8}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

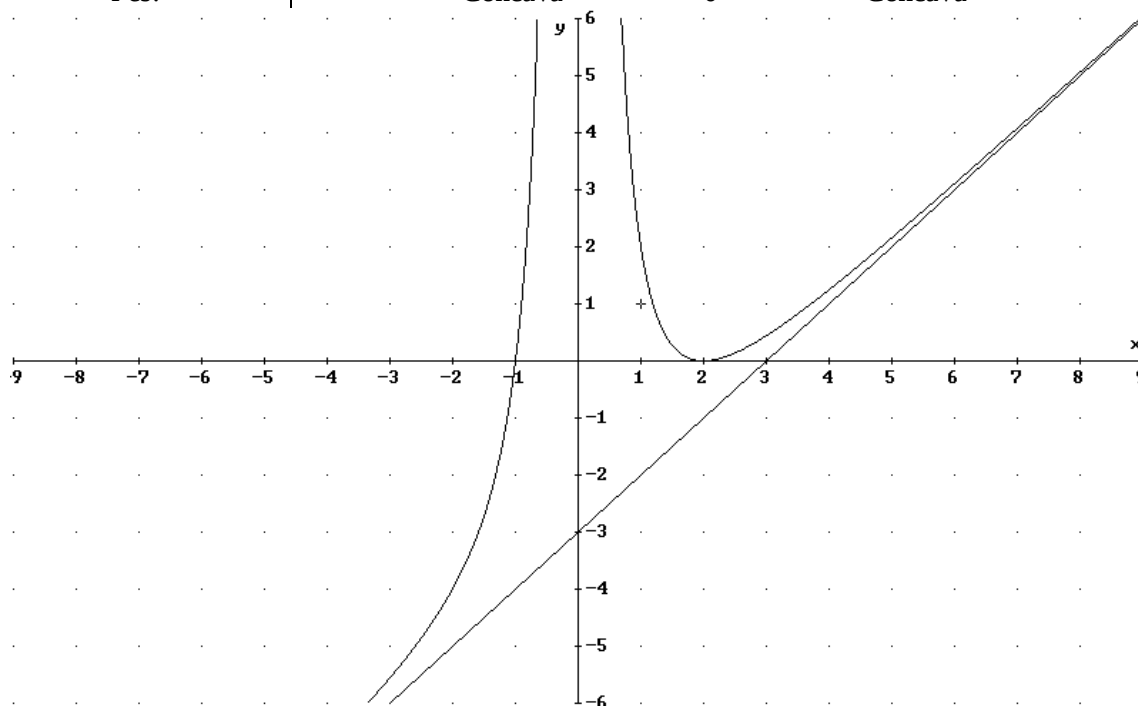
Signo f'	+	0	-	+
f es:	Crece	No definida	Decrece	Crece
			Mínimo	

Tiene un mínimo en el punto: (2, 0)

f) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión:**

$$y'' = \frac{24}{x^4} \neq 0, \text{ no tiene puntos de inflexión.}$$

Signo f''	+	0	+
f es:	Cóncava		Cóncava



7. $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$

a) **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

b) **Puntos de corte con los ejes:**

i) $x = 0$ no definida ($0 \notin \text{Dom } f$)

ii) $y = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x^3 + 2}{x} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2}, (\sqrt[3]{-2}, 0)$

c) **Simetrías:** $f(-x) \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ no tiene.

d) **Asíntotas**

i) Asíntotas verticales: $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + 2}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + 2}{x} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0$

ii) Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 2}{x} = +\infty \Rightarrow$ no tiene

iii) Asíntotas oblicuas: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 2}{x^2} = \pm\infty \Rightarrow$ no tiene

e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:**

$y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$

Signo f'		-		-		+
f es:		Decrece	0	Decrece	1	Crece
		No definida			Mínimo	

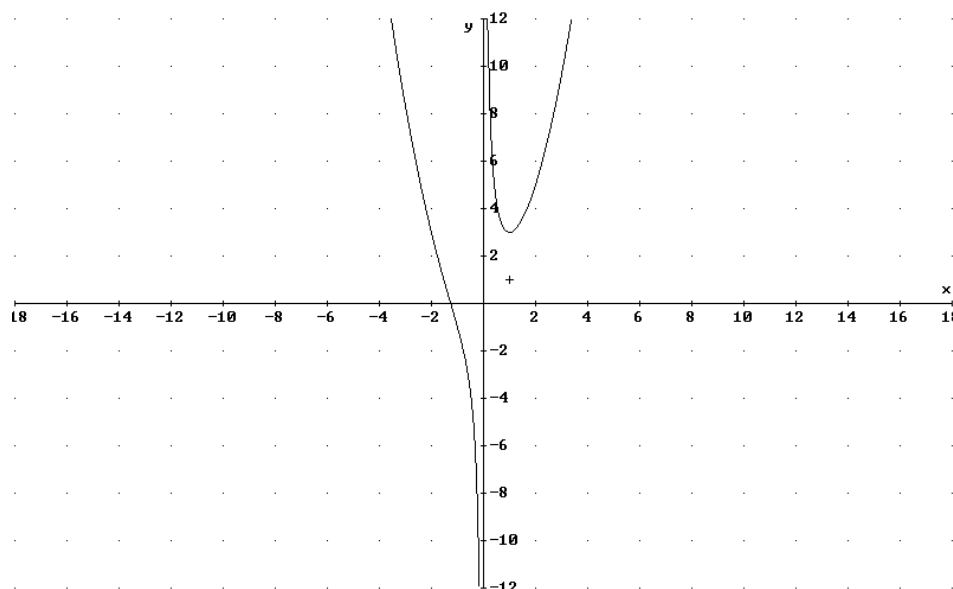
Tiene un mínimo en el punto: (1, 3)

f) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión:**

$y'' = 2 + \frac{4}{x^3} = \frac{2x^3 + 4}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 + 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2}$

Signo f''		+		-		+
f es:		Cóncava	$\sqrt[3]{-2}$	Convexa	0	Cóncava
		Pto. Inflexión			No definida	

Punto de inflexión en $(\sqrt[3]{-2}, 0)$



8. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

a) **Dominio:** $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$

b) **Puntos de corte con los ejes:** (0,0)

c) **Simetrías:** $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x) \Rightarrow f$ es impar y por lo tanto es simétrica respecto al origen de coordenadas.

d) **Asíntotas**

i) Asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = -1$

ii) Asíntotas Horizontales: No tiene

iii) Asíntotas oblicuas: $y = x$

e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:**

$$y' = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Signo f'		+		-		-		-		-		+
f es:		Crece	$-\sqrt{3}$	decrece	-1	decrece	0	decrece	1	decrece	$\sqrt{3}$	crece
		Máximo		no def.		No def.		mínimo				

Tiene un máximo en el punto: $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)$ y un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{3}\right)$

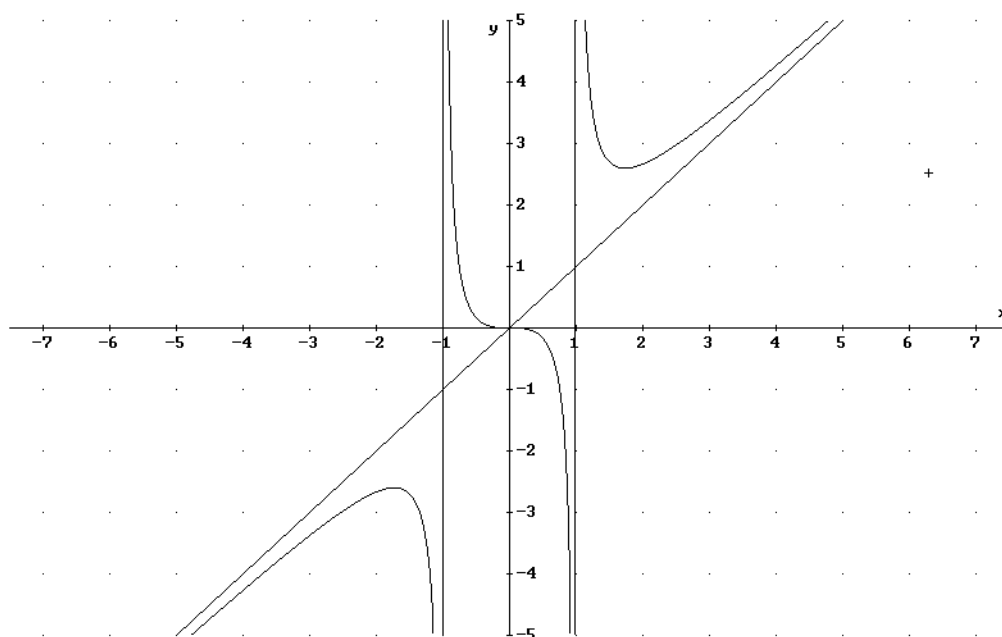
f) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión:**

$$y'' = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Rightarrow x(2x^2 + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-3} \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Signo f''		-		+		-		+
f es:		Convexa	-1	Cóncava	0	Convexa	1	Cóncava
		Pto. Inflex.						

Tiene un punto de inflexión en el punto: (0 , 0)

g) **Gráfica:**



9. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

a) Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

b) Puntos de corte con los ejes: $(-1, 0), (1, 0)$

c) Simetrías: $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} = f(x)$, es simétrica respecto del eje OY.

d) Asíntotas

i) Asíntotas verticales: No tiene

ii) Asíntotas horizontales: No tiene

iii) Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 1, n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = 0 \Rightarrow y = x$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} \right) = -1, n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x) = 0 \Rightarrow y = -x$$

e) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0 \Rightarrow x = 0 \notin \text{Dom } f$.

$$\text{Dom } f' = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

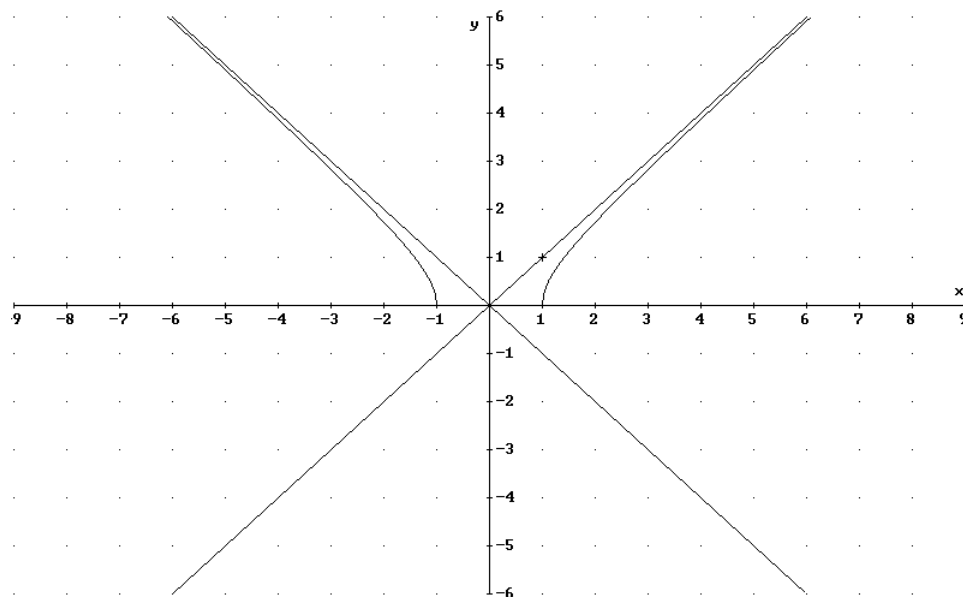
En el intervalo $(-\infty, -1)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente

En el intervalo $(1, +\infty)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente

f) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} \neq 0$, $\text{Dom } f'' =$

$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, la derivada segunda es negativa en todo su dominio $\Rightarrow$ es siempre convexa

g) Gráfica:



10. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

- a) Dominio: $[-1, 1]$
- b) Puntos de corte con los ejes: $(-1, 0), (1, 0)$
- c) Simetrías: $f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x)$, es simétrica respecto del eje OY.
- d) Asíntotas
 - i) Asíntotas verticales: No tiene
 - ii) Asíntotas horizontales: No tiene ya que el dominio de $f = [-1, 1]$
 - iii) Asíntotas oblicuas: No tiene
- e) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow x = 0$.

Dom $f' = (-1, 1)$

En el intervalo $(-1, 0)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente

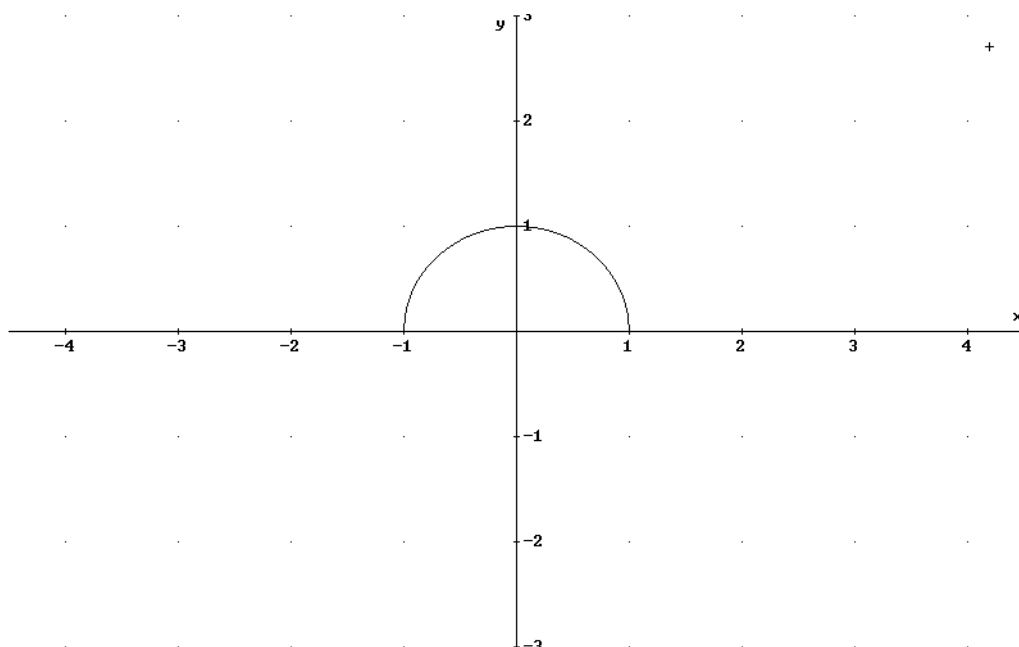
En el intervalo $(0, 1)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente

Tiene un máximo en el punto: $(0, 1)$

- f) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \neq 0$, Dom $f'' = (-1, 1)$, la

derivada segunda es negativa en todo su dominio $\Rightarrow$ es siempre convexa.

- g) Gráfica:



11. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

a) **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

b) **Puntos de corte con los ejes:**

i) $x = 0$ no definida ($0 \notin \text{Dom } f$), no corta al eje de ordenadas (Y).

ii) $y = e^{\frac{1}{x}} > 0 \Rightarrow$ no corta al eje de abscisas (X).

c) **Simetrías:** $f(-x) = e^{1/(-x)} = e^{-1/x} = \frac{1}{e^{1/x}} \neq \pm f(x) \Rightarrow f$ no tiene.

d) **Asíntotas**

i) Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow \text{no tiene}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

ii) Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$

e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:** $y' = \frac{-e^{1/x}}{x^2} \neq 0$. No tiene máximos ni mínimos.

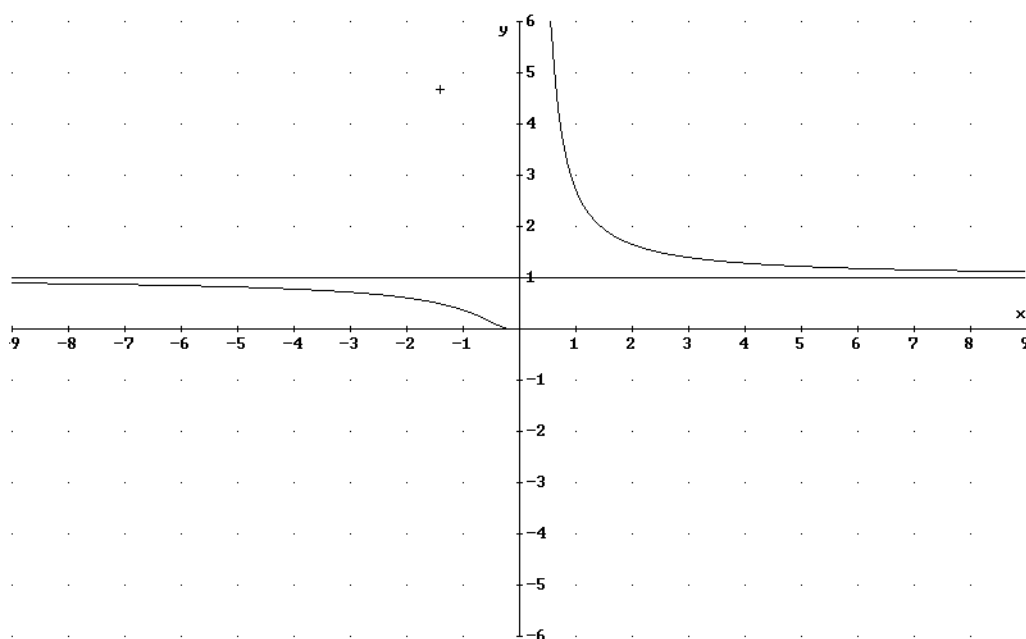
Signo f'	—	0	—
f es:	decrece	No definida	decrece

f) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión:** $y'' = \frac{e^{1/x}(1+2x)}{x^4} = 0, x = -1/2$

Signo f''	—	+	+
f es:	Convexa	cóncava	Cóncava
	Pto. Inflexión	No definida	

Punto de inflexión en $(-1/2, e^{-2})$, $e^{-2} \cong 0.135335$

g) **Gráfica:**



12. $y = \frac{\ln x}{x}$

a) Dominio: $(0, +\infty) = \mathbb{R}^+$. Continua en su dominio

b) Puntos de corte con los ejes:

$0 \notin \text{Dom } f$, luego no corta al eje OY

$f(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$, $(1, 0)$ corte con el eje OX.

c) Simetrías: No hay (Si $x \in \text{Dom } f$, $-x \notin \text{Dom } f$)

d) Asíntotas

i) Asíntotas verticales: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, $\boxed{x = 0}$

ii) Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\boxed{y = 0}$

e) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow 1 = \ln x \Rightarrow x = e$$

En el intervalo $(0, e)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente

En el intervalo $(e, +\infty)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente

Para $x = e$ tiene un máximo relativo: $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

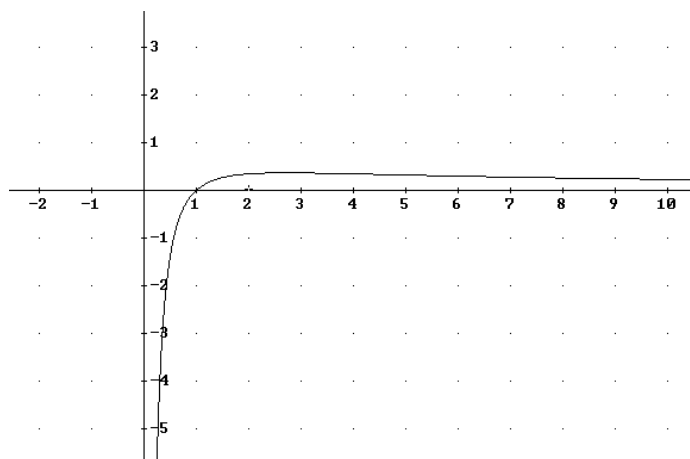
f) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $f''(x) = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3} = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$

En el intervalo $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es convexa.

En el intervalo $\left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava.

Para $x = e^{\frac{3}{2}}$ tiene un punto de inflexión: $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

Gráfica:



13. $y = \ln(x^2 - 1)$

- b) Puntos de corte con los ejes:

$x = 0 \notin \text{Dom } f \Rightarrow$ no corta al eje de ordenadas.

$$y = 0 \Rightarrow \ln(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = e^0 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} \quad \begin{cases} (\sqrt{2}, 0) \\ (-\sqrt{2}, 0) \end{cases}$$

- c) Simetrías: $\begin{cases} f(-x) = \ln((-x)^2 - 1) = \ln(x^2 - 1) \\ f(x) = \ln(x^2 - 1) \end{cases} \Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow f \text{ es par y por lo tanto la}$

gráfica es simétrica respecto del eje Y.

- d) Asíntotas

- i) **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(x^2 - 1) = \ln 0 = -\infty. \text{ Asíntota } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x^2 - 1) = \ln 0 = -\infty. \text{ Asíntota } x = 1$$

- ii) **Asíntotas Horizontales:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 1) = +\infty \Rightarrow$ No tiene.

- iii) Asíntotas oblicuas: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = 0 \Rightarrow$ No tiene

- e) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x = 0 \notin \text{Dom } f$$

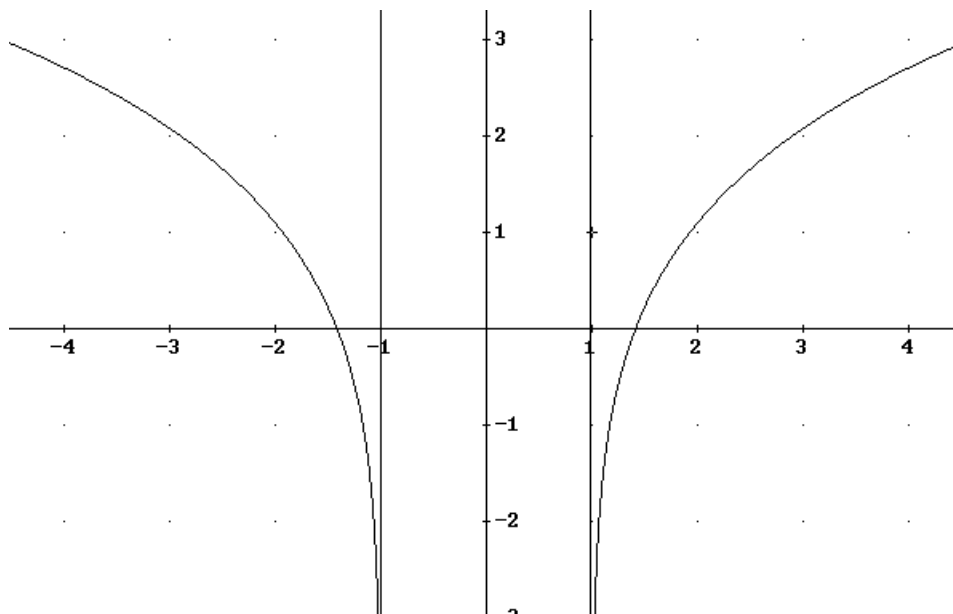
Signo f'	$-$	-1	1	$+$
f es:	decrece	No definida	crece	
no tiene máximo ni mínimo.				

- f) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{2 \cdot (x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2} \neq 0 \Rightarrow \text{no tiene puntos de inflexión.}$$

Signo f''	–				–
f es:	convexa	–1	No definida	1	convexa

- g) Gráfica:



14. $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

g) Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

h) Puntos de corte con los ejes: no tiene.

i) Simetrías: $f(-x) = -x \cdot e^{\frac{1}{-x}} = -\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ no tiene

j) Asíntotas

i) Asíntotas verticales:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow$ no tiene cuando $x \rightarrow 0^-$ pues la función tiende a cero

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \Rightarrow \boxed{x=0}$$

ii) Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = (\pm\infty \cdot e^0) = \pm\infty$. No tiene.

iii) Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$; $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'Hop}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\boxed{y = x + 1}$$

k) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:

$$y' = \left(1 - \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}} = 0, \text{ como } e^{\frac{1}{x}} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$$

En el intervalo $(-\infty, 0)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente

En el intervalo $(0, 1)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente

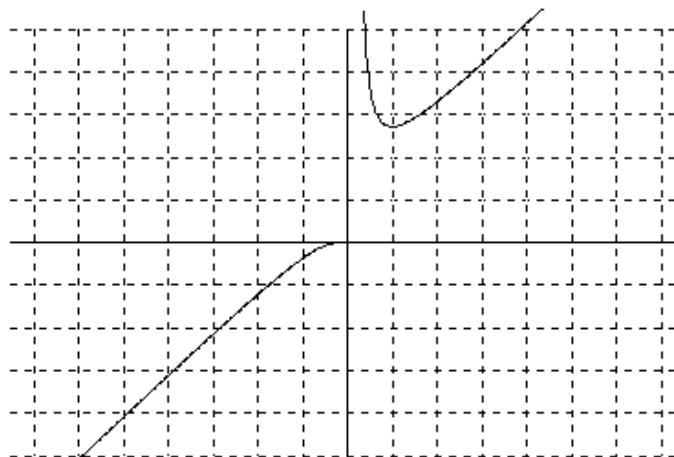
En el intervalo $(1, +\infty)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente

En $x = 1$ hay un mínimo relativo. Mínimo: $(1, e)$

l) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \neq 0$

En el intervalo $(-\infty, 0)$ $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es convexa

En el intervalo $(0, +\infty)$ $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava



$$15. f(x) = \frac{|x-2|}{x} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{-(x-2)}{x} & \text{si } x \leq 2 \text{ y } x \neq 0 \\ \frac{x-2}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- b) Puntos de corte con los ejes: $(0, 2)$
- c) Simetrías: no tiene
- d) Asíntotas

i) Asíntotas verticales: $x = 0$

ii) Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+2}{x} = -1 \Rightarrow x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

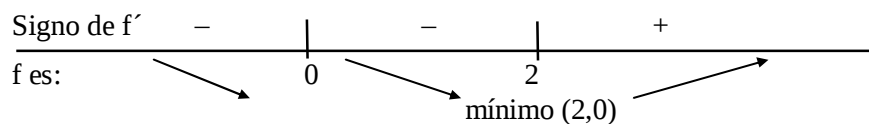
iii) Asíntotas oblicuas: no tiene

- e) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{-(x-2)}{x} & \text{si } x \leq 2 \text{ y } x \neq 0 \\ \frac{x-2}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}, \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}, \text{ es continua en su}$$

dominio, pero **no es derivable** en $x = 2$: $\begin{cases} f'(2^-) = -\frac{1}{2} \\ f'(2^+) = \frac{1}{2} \end{cases}$. La función derivada de f es:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x^2} & \text{si } x < 2, x \neq 0 \\ \frac{2}{x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}, f'(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in \text{Dominio de } f'$$

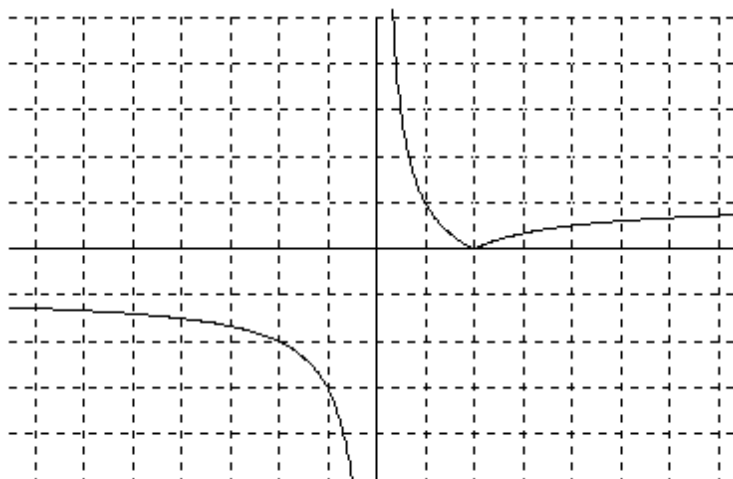


En los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, 2)$ la función decrece, pues $f'(x) < 0$

En $x = 2$ tiene un mínimo relativo, $f(2) = 0$. El mínimo está en el punto $(2, 0)$

En el intervalo $(2, +\infty)$ decrece, pues $f'(x) > 0$

- f) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: (se deja como ejercicio)



16. $y = \ln x - x$

a) Dominio: $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$

b) Puntos de corte con los ejes:

No corta al eje de ordenadas pues para $x = 0$ no está definida ($0 \notin \text{Dom } f$).

Como $\forall x \in (0, +\infty) \ln x < x \Rightarrow \ln x - x \neq 0$ y por lo tanto no corta al eje de abscisas.

c) Simetrías: no tiene

d) Asíntotas

i) Asíntotas verticales: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x) = -\infty \Rightarrow \boxed{x = 0}$

ii) Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) = -\infty \left(\text{ya que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \right), \text{ no tiene.}$$

iii) Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - x}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{1} = -1 \quad \text{No tiene asíntota oblicua}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

e) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $y' = \frac{1}{x} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$.

$$y'' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow \text{máximo en } x = 1, f(1) = -1 \Rightarrow \text{máximo en el punto } (1, -1).$$

En el intervalo $(0, 1)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente.

En el intervalo $(1, +\infty)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente.

f) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $y'' = -\frac{1}{x^2} \neq 0, f''(x) < 0$ para todo $x \in \text{Dom } f$

$\Rightarrow$ la función es siempre cóncava.

g) Gráfica:

