1. Escribir la matriz A de dimensiones 5 x 4 y elementos:

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & si \quad i < j \\ 2i - 3j & si \quad i \geq j \end{cases} \qquad \text{Sol: } \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & -1 & -4 \\ 7 & 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

2. Una fábrica de embutidos comercializa tres tipos de productos: salchichón, chorizo y morcilla. Para su fabricación se utilizan gordos de cerdo, sangre, carne magra, cebolla y especias. La siguiente matriz, da la composición en tantos por ciento de un kilo de cada uno de los productos:

La fábrica dispone de 3 plantas donde, en total, se fabrican diariamente 200 kg de salchichón, 150 de chorizo y 100 de morcilla, según indica la siguiente matriz:

	Salchichón	**Chorizo**	**Morcilla**
Gordos	20	30	40
Sangre	0	0	30
Carne	70	40	0
Cebolla	0	0	20
Especias	10	30	10

	Planta 1ª	**Planta 2ª**	**Planta 3ª**
Salchichón	60	70	70
Chorizo	50	50	50
Morcilla	70	30	0

Sabiendo que el kilo de gordos cuesta 80 cts, el de sangre 70 cts, el de carne magra 2 €, el de cebolla 40 cts y el de especias 1,5 €, ¿qué dinero en materias primas gasta cada planta de fabricación en un día?

Sol: (230, 3217, 194,2) (en euros)

3. Si A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}) pertenecen a $\mathcal{M}_{3x4}$ y $a_{ij} = i-j$ y $b_{ij} = (-1)^{i+j} + 2^{j+1}$, calcular la matriz A+B.

Sol: $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 15 & 28 \\ 4 & 9 & 14 & 31 \\ 7 & 8 & 17 & 30 \end{pmatrix}$

4. Resolver la ecuación matricial X A = B + C, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol: $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Sol: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

6. Calcular la matriz X que verifica AXB - 3A = I, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Sol: $\begin{pmatrix} 74/35 & 23/35 \\ -43/35 & 24/35 \end{pmatrix}$

7. Resolver la ecuación $A^{-1}XB - 2CD = B^2$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y

D = (1 3). Sol: $X = \begin{pmatrix} 4 & 22 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$

8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   a. Calcular A+A' y A-A', indicando de qué tipo es cada una de ellas.
   b. Descomponer la matriz A como suma de una simétrica y otra antisimétrica.
   c. Demostrar que en general, dada una matriz de orden n, puede descomponerse como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

Sol: a) $A + A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *matriz simetrica* $A - A' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *matriz antisimetrica*

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 0 \\ -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

9. Si A es una matriz cuadrada cualquiera, demostrar que entonces AA^t, A^tA y $A + A^t$ son matrices simétricas.

10. Hallar la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ por el método de Gauss - Jordan.

Sol: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

11. Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ determinar **x** e **y** para que se verifique $A^2 + xA + yI_2 = 0$.

Hallar después todas las matrices M de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ que satisfacen la relación anterior.

Sol: a) x = - 5; y = 4 b) $M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

13. Una matriz cuadrada A es **idempotente** si verifica que $A^2 = A$.

a. Comprobar que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ es idempotente.

b. Escribir todas las matrices diagonales de orden 3 que sean idempotentes.

c. ¿Qué condiciones ha de cumplir una matriz de orden 2 para que sea idempotente?

Sol: b) son 8 tomando de todas las formas posibles como valores de a, b y c, cero o uno.

14. Demostrar que si $A \cdot B = A$ y $B \cdot A = B$, entonces A y B son idempotentes.

15. Una matriz A es **involutiva** si verifica $A^2 = I$.
Demostrar que A es involutiva si y sólo si $(I - A) \cdot (I + A) = 0$

16. Si A es idempotente, demostrar que también lo es la matriz $B = I - A$ y que $A \cdot B = B \cdot A = 0$.

17. Se dice que una matriz A es **nilpotente** de orden n, si verifica que $A^n = 0$. Hallar el orden de nilpotencia de la matriz: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sol: n = 3

18. Demostrar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ son nilpotentes.

Sol: A es nilpotente de orden 3 y B es nilpotente de orden 2.

19. Encontrar la matriz A que verifique:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5/2 \\ -2/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

20. Encontrar todas las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

21. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

   a. Calcular A^2, A^3, A^4.
   b. Sea $B = I + A$; expresar B^2 y B^3 en función de I, A y A^2.
   c. Demostrar que la inversa de B es $I-A+A^2$.

Sol: a) $A^2 = A^3 = A^4 = O_3$ b) $B^2 = I + 2A$; $B^3 = I + 3A$ c) $(I - A + A^2)(I + A) = I$

22. Una matriz A es **periódica** si $A^n = A$ para algún entero positivo n. Al menor entero positivo para el que esto ocurre se le llama **período** (si n = 2 la matriz se llama **idempotente**).

Calcular el período de las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 14 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz A^{100}.

Sol: n(A) =4; n(B) = 3; $A^{100} = A$

23. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar A^{35}. Sol: $A^{35} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

24. Una matriz es **ortogonal** si verifica $A' = A^{-1}$, es decir, $A \cdot A' = A' \cdot A = I$.

Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ es ortogonal

25. Una matriz es **normal** si conmuta con su traspuesta, es decir, si A' · A = A · A' (Si A es simétrica, antisimétrica u ortogonal, es necesariamente normal).

   a. Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ es normal.

   b. Hallar una expresión para todas la matrices normales de orden 2.

   Sol: $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

26. Hallar **a** y **b** de forma que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique que $A^2 = 2A$. Para estos valores de **a** y **b**, y tomando $B = \frac{1}{2}A$ calcular A^{50} y B^{50}.

   Sol: a = 1, b = 1; $A^{50} = \begin{pmatrix} 2^{49} & 2^{49} \\ 2^{49} & 2^{49} \end{pmatrix}$, $B^{50} = \begin{pmatrix} 3^{49}/2^{49} & 3^{49}/2^{49} \\ 3^{49}/2^{50} & 3^{49}/2^{50} \end{pmatrix}$

27. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, demostrar que $A^3 - 2A^2 - 9A = 0$, pero $A^2 - 2A - 9I \neq 0$ (es decir, el producto de matrices tiene divisores de cero).

28. Sea A una matriz cuadrada. Si $A^2 + 2A + I = 0$, comprobar que A es invertible.

29. Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ hallar A^{428}.

Sol: $A^{428} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

30. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ determinar, si es posible, un valor λ para el que la matriz $(A - \lambda I)^2$ sea la matriz nula. Sol: $\lambda = 1$

31. Demostrar que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

32. Hallar las matrices inversas de $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Sol: $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$; $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

33. Hallar la potencia n-ésima de: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

Sol: A es periódica de período 5; $B^n = B$; C es periódica de período 3

34. Resolver el sistema $\begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ X + Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \end{cases}$

Sol: $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

35. Hallar las matrices A y B que verifican el sistema de ecuaciones $\begin{cases} A + B = C \\ 2A + 3B = D \end{cases}$ siendo

$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Sol: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

36. a) Obtener todas las matrices A de orden 2 tales que $A^2 = I_2$.
b) Obtener todas las matrices B de orden 2 tales que $B \neq 0$ y $B^2 = 0$.

Sol: a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{pmatrix}$

37. Hallar el rango de las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

Sol: r(A) = 2; r(B) = 2

38. Calcular, por inducción, las potencias n-ésimas de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Sol: $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$; $B^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$; $C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n^2+n}{2} & n & 1 \end{pmatrix}$; $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

$E^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $F^n = \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & sen(n\alpha) \\ -sen(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}$

39. Calcular el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de **t**: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

Sol: Si t = 4, r(A) = 1; Si t ≠4, r(A) = 2.

40. Si A es una matriz con números complejos, la matriz obtenida a partir de A sustituyendo cada elemento por su conjugado, se llama **matriz conjugada** de A y se escribe $\overline{A}$.
Si A es cuadrada y $\overline{A'} = A$,($a_{ij} = \overline{a_{ji}}$) entonces se llama **hermítica** o **autoadjunta** (los elementos de la diagonal principal han de ser números reales).
Si $\overline{A'} = -A$, ($a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$) se llama **antihermítica** o **hemihermítica**.

Comprobar que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}$ es hermítica y $B = \begin{pmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{pmatrix}$ es antihermítica.

41. Demostrar que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & -i \\ -2-3i & -1 & 0 \end{pmatrix}$ entonces:

a. A es hermítica y B es antihermítica
b. iB es hermítica
c. $\overline{A}$ es hermítica
d. $\overline{B}$ es hemihermítica