

Opción A

- 1.- a) [1 punto] Si A y B son dos matrices cuadradas y del mismo orden, ¿es cierta en general la relación $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$? Justifica la respuesta.

b) [1,5 puntos] Calcula, según los valores de a, el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

- 2.- a) [1,5 puntos] El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para $a = 3$.

Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques.

- b) [1 punto] Determina todos los valores de "a" para los que las tres columnas del determinante anterior representan vectores linealmente dependientes. Justifica la respuesta.

- 3.- Considera el sistema de ecuaciones:

$$2x - 2y - z = 4,$$

$$x + 2y - 2z = -1,$$

$$x - z = 1.$$

- a) [1,25 puntos] ¿Existe una solución del mismo en la que $y = 0$?

- b) [1,25 puntos] Resuelve el sistema homogéneo asociado al sistema dado.

- 4.- Una tienda vende una clase de calcetines a 12€ ptas. el par. Al llegar las rebajas, durante el primer mes realiza un 30% de descuento sobre el precio inicial y en el segundo mes un 40% también sobre el precio inicial. Sabiendo que vende un total de 600 pares de calcetines por 5976€ y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total, ¿a cuántos pares de calcetines se les ha aplicado el descuento del 40 %?

Opción B

- 1.- Dado $x \in \mathbb{R}$, considera la matriz $A = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$

- a) [1 punto] Calcula $A A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

- b) [1,5 puntos] Prueba que A tiene inversa y hállala.

- 2.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$ donde a, b y c son no nulos.

- a) [1 punto] Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.

- b) [1,5 puntos] Calcula el rango de A y razona si dicha matriz tiene inversa.

- 3.- Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- a) [1 punto] ¿Para qué valores de α no tiene inversa la matriz de coeficientes del sistema anterior?

- b) [1,5 puntos] Discute sus soluciones según los valores de α .

- 4.- [2,5 puntos] En un supermercado se ofrecen dos lotes formados por distintas cantidades de los mismos productos.

- El primer lote está compuesto por una botella de cerveza, tres bolsas de cacahuets y siete vasos y su precio es de 4,25€.

- El segundo lote está compuesto por una botella de cerveza, cuatro bolsas de cacahuets y diez vasos y su precio es de 5,5€.

Con estos datos ¿podrías averiguar cuánto debería valer un lote formado por una botella de cerveza, una bolsa de cacahuets y un vaso? Justifica la respuesta.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Opción A

- 1.- a) [1 punto] Si A y B son dos matrices cuadradas y del mismo orden, ¿es cierta en general la relación $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Justifica la respuesta.

b) [1,5 puntos] Calcula, según los valores de a, el rango de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden se verifica:

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

como en general el producto de matrices no verifica la propiedad conmutativa, normalmente $AB \neq BA$, luego la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ en general no es cierta.

b) Entendemos por rango de una matriz el número de filas o columnas que son linealmente independientes. En nuestro caso observamos que la 2ª columna es el doble de la 1ª y la 3ª columna es el triple de la misma, por lo tanto para el cálculo del rango podemos prescindir de la 2ª y 3ª columnas, quedando:

$$\text{rg}(M) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

$$\text{- Si } a = 4 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 1.$$

$$\text{- Si } a \neq 4 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 2.$$

- 2.- a) [1,5 puntos] El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para $a = 3$.

Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques.

b) [1 punto] Determina todos los valores de "a" para los que las tres columnas del determinante anterior representan vectores linealmente dependientes. Justifica la respuesta.

Solución:

a) Si sustituimos a por 3 el determinante queda como

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 13 \\ 8 & 27 & 35 \end{vmatrix}$$

Como la 3ª columna es combinación lineal de la 1ª y 2ª (suma de ambas) el determinante es nulo.

b) Las tres columnas del determinante anterior representan vectores linealmente dependientes si el valor del mismo es cero. Hallemos el valor del determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix} = 2a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & a & 13 \\ 4 & a^2 & 35 \end{vmatrix} = 2a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & a-2 & 3 \\ 0 & a^2-4 & 15 \end{vmatrix} = 2a \cdot \begin{vmatrix} a-2 & 3 \\ a^2-4 & 15 \end{vmatrix} = 2a(-3a^2+15a-18)$$

Obligüemos a que sea nulo:

$$2a(-3a^2+15a-18) = 0 \Rightarrow -6a(a-3)(a-2) = 0$$

con soluciones $a = 0$, $a = 2$ y $a = 3$.

3.- Considera el sistema de ecuaciones:

$$2x - 2y - z = 4,$$

$$x + 2y - 2z = -1,$$

$$x - z = 1.$$

a) [1,25 puntos] ¿Existe una solución del mismo en la que $y = 0$?

b) [1,25 puntos] Resuelve el sistema homogéneo asociado al sistema dado.

Solución:

a) Calculamos la compatibilidad del sistema. La matriz asociada y su determinante valen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -4 + 4 + 2 - 2 = 0$$

$$\text{Como el menor } \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ rg}(A) = 2.$$

La matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Orlamos el menor no nulo y obtenemos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 8 + 2 = 0, \text{ rg}(A') = \text{rg}(A) = 2 < 3$$

y el sistema es compatible indeterminado, es decir tendrá infinitas soluciones. Eliminamos una ecuación, por

ejemplo la segunda, ya que el menor $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, y el sistema será equivalente a:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2y - z = 4 \\ x - z = 1 \end{array} \right\}$$

Si tomamos $z = \lambda$, y resolvemos la ecuación queda:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2y = 4 + \lambda \\ x = 1 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + \lambda) - 2y = 4 + \lambda \Rightarrow 2 + 2\lambda - 2y = 4 + \lambda \Rightarrow -2y = 2 - \lambda \Rightarrow y = -1 + \frac{\lambda}{2}$$

Luego las soluciones serán:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \frac{\lambda}{2}, \text{ con } \lambda \in \mathbf{R}. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Veamos que existe una solución en la que $y = 0$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow \lambda = 2, x = 3, z = 2$$

Luego la solución será: $(3, 0, 2)$

b) El sistema homogéneo asociado será:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2y - z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right\}$$

Como $|A| = 0$ y $\text{rg}(A) = 2$ por el apartado anterior, el sistema tendrá soluciones distintas de la trivial y será equivalente al:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right\}$$

Si tomamos $z = \lambda$, y resolvemos la ecuación queda:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2y = \lambda \\ x = \lambda \end{array} \right\}$$

$$2\lambda - 2y = \lambda \Rightarrow -2y = -\lambda \Rightarrow y = \frac{\lambda}{2}$$

Luego las soluciones serán:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \frac{\lambda}{2}, \text{ con } \lambda \in \mathbf{R} \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

$$\text{Es decir, } S = \left\{ \left(\lambda, \frac{\lambda}{2}, \lambda \right) / \lambda \in \mathfrak{R} \right\}$$

- 4.- **Una tienda vende una clase de calcetines a 12€ ptas. el par. Al llegar las rebajas, durante el primer mes realiza un 30% de descuento sobre el precio inicial y en el segundo mes un 40% también sobre el precio inicial. Sabiendo que vende un total de 600 pares de calcetines por 5976€ y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total, ¿a cuántos pares de calcetines se les ha aplicado el descuento del 40 %?**

Solución:

Si el precio inicial era de 12€, con el 30% de descuento el precio es 8,4€ y con el 40% de descuento el precio es 7,2€.

Sabiendo que vende un total de 600 pares y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total

- ha vendido 300 pares sin rebajar por: $300 \times 12 = 3600\text{€}$.

- ha vendido 300 pares rebajados por: $5976 - 3600 = 2376\text{€}$.

Llamando x al número de pares vendidos con un 30% de descuento (8,4€) y $300-x$ al número de pares vendidos con un 40% de descuento (7,2€), obtenemos la ecuación:

$$8,4x + 7,2 \cdot (300-x) = 2376 \Rightarrow 1,2x + 2160 = 2376 \Rightarrow 1,2x = 216$$

con solución:

$$x = \frac{216}{1,2} = 180, 300-x = 120$$

Es decir, se han vendido:

180 pares con 30% descuento

120 pares con 40% descuento.

Opción B

- 1.- **Dado $x \in \mathbb{R}$, considera la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

a) [1 punto] Calcula $A A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

b) [1,5 puntos] Prueba que A tiene inversa y hállala.

Solución:

a) Como la matriz traspuesta es

$$A^t = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

el producto pedido es

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 x + \sin^2 x & -\cos x \sin x + \sin x \cos x \\ -\sin x \cos x + \cos x \sin x & \cos^2 x + \sin^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Para que tenga inversa ha de ocurrir que el determinante de la matriz ha de ser distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$$

según el apartado anterior $A \cdot A^t = I$, veamos que ocurre con el producto $A^t \cdot A$:

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 x + \sin^2 x & \cos x \sin x - \sin x \cos x \\ \sin x \cos x - \cos x \sin x & \cos^2 x + \sin^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego deducimos que la traspuesta de A coincide con su inversa.

2.- Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son no nulos.

a) [1 punto] Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.

b) [1,5 puntos] Calcula el rango de A y razona si dicha matriz tiene inversa.

Solución:

a) Tenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$$

para calcular el número de columnas que son independientes calculamos el rango de A, ya que ambos valores coinciden. Como el determinante, sumando a la 2ª fila la 1ª, es:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 0 & 4c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = 0$$

por tener la 2ª y 3ª filas iguales. El rango de la matriz es 3.

Además hay un menor de orden 2 no nulo puesto que:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & -b \end{vmatrix} = -3ab \neq 0$$

ya que tanto a como b son no nulos según el enunciado del problema. Luego $\text{rg}(A) = 2$ y hay dos columnas linealmente independientes.

b) En el apartado anterior hemos calculado el rango de A, que era 2 y como $|A| = 0$ sabemos que no tiene inversa.

3.- Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a) [1 punto] ¿Para qué valores de α no tiene inversa la matriz de coeficientes del sistema anterior?

b) [1,5 puntos] Discute sus soluciones según los valores de α .

Solución:

a) Para que la matriz A de los coeficientes del sistema no tenga inversa, su determinante ha de ser cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = \alpha^2 + 2\alpha - 15$$

Igualando a cero, tendremos: $\alpha^2 + 2\alpha - 15 = 0$

$$\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 15}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \Rightarrow \alpha = 3 \text{ y } \alpha = -5$$

luego la matriz A no tendrá inversa para $\alpha \in \{3, -5\}$

b) Si $\alpha \notin \{3, -5\}$ El rango de A es 3, y por lo tanto el rango de la matriz ampliada también será 3, que es el número de incógnitas, y por el Teorema de Rouché el sistema tendrá solución única, es decir representa tres planos que se cortan en un punto.

• Si $\alpha = -5$ el sistema será:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

el rango de A es 2, ya que $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Como $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$ y por lo tanto el rango de la matriz

ampliada será 3, y el sistema será incompatible, es decir no tendrá solución, y como los planos no son paralelos, representan tres caras de un prisma triangular.

• Si $\alpha = 3$ el sistema será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

el rango de A es 2, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 0$ y por lo tanto el rango de la matriz

ampliada será 2, y el sistema será compatible indeterminado, es decir tendrá infinitas soluciones.

4.- [2,5 puntos] En un supermercado se ofrecen dos lotes formados por distintas cantidades de los mismos productos.

- El primer lote está compuesto por una botella de cerveza, tres bolsas de cacahuets y siete vasos y su precio es de 4,25€.
- El segundo lote está compuesto por una botella de cerveza, cuatro bolsas de cacahuets y diez vasos y su precio es de 5,5€.

Con estos datos ¿podrías averiguar cuánto debería valer un lote formado por una botella de cerveza, una bolsa de cacahuets y un vaso? Justifica la respuesta.

Solución:

Sean

x = precio de una botella de cerveza

y = precio de una bolsa de cacahuets

z = precio de un vaso

Los precios de los distintos lotes son:

- $x + 3y + 7z = 4,25$ para el primer lote

- $x + 4y + 10z = 5,5$ para el segundo lote

- $x + y + z = P$ para el tercer lote

Queremos encontrar el precio del tercer lote conocidos los anteriores, es decir encontrar dos números a y b tales que:

$$a(x+3y+7z) + b(x+4y+10z) = x+ y+ z$$

$$(a+b)x+(3a+4b)y+(7a+10b)z = x+y+z$$

Igualdad que se cumple si son iguales los coeficientes:

$$a+ b = 1$$

$$3a+ 4b = 1$$

$$7a+10b = 1$$

Su solución se encuentra sustituyendo $a = 1-b$ en la segunda ecuación:

$$3(1-b)+ 4b = 1 \Rightarrow 3+b = 1 \Rightarrow b = 1-3 = -2$$

$$a = 1-(-2) = 3$$

Y comprobando que se cumple para dichos valores la tercera ecuación:

$$7.3+10(-2) = 1$$

Luego el precio del tercer lote será:

$$a(x+3y+7z) + b(x+4y+10z) = 3.4,25+(-2).5,5 = 1,75\text{€}.$$

Apellidos: _____ Nombre: _____

Curso: 2º Grupo: _ Día: _____

CURSO 2015-16

**Opción A**

1.- **[2,5 puntos]** Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Determina, si existe, la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2$.

2.- Se sabe que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es -3.

Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) **[1 punto]** $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$.

b) **[1,5 puntos]** $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} + a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$x + 2y - 3z = 3$$

$$2x + 3y + z = 5$$

a) **[1,5 puntos]** Calcula α de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

b) **[1 punto]** Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

4.- Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado 22 euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de 14 euros. Se pide:

a) **[1,25 puntos]** Expresar en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

b) **[1,25 puntos]** Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

Opción B

1.- Considera las matrices, $A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) [0,75 puntos] ¿Para qué valores de m se verifica que $A^2 = 2 \cdot A + I$? (I denota la matriz identidad).

b) [1,75 puntos] Para $m = 1$, calcula A^{-1} y la matriz X que satisface $A \cdot X - B = A \cdot B$.

2.- Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes determinantes sin

desarrollarlos:

a) [0,5 puntos] $\det(3A)$.

b) [0,5 puntos] $\det(A^{-1})$.

c) [0,75 puntos] $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

d) [0,75 puntos] $\begin{vmatrix} & 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 & \\ -1 & 0 & -1 & \end{vmatrix}$.

3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} x + (m+1)y + 2z = -1 \\ mx + y + z = m \\ (1-m)x + 2y + z = -m-1 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m .

b) [0,75 puntos] Resuélvelo para $m = 2$. Para dicho valor de m , calcula, si es posible, una solución en la que $z=2$.

4.- [2,5 puntos] Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B y C. El primer lingote contiene 20 g del metal A, 20 g del B y 60 del C. El segundo contiene 10 g de A, 40 g de B y 50 g de C. El tercero contiene 20 g de A, 40 g de B y 40 g de C. Queremos elaborar a partir de estos lingotes uno nuevo que contenga 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C. ¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Opción A

1.- [2,5 puntos] Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Determina, si existe, la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2$.

Solución:

La matriz tiene inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t)$ si su determinante es no nulo. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0+0+0) - (0+0+1) = -1$$

La matriz tiene inversa.

Obtenemos la matriz traspuesta:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de los adjuntos de la traspuesta será:

$$\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego la inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación matricial:

$$A \cdot X = A^2 - B$$

Multiplicamos por la izquierda por la izquierda:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A^2 - A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot A^2 - A^{-1} \cdot B$$

Sustituyendo por las matrices, obtenemos la matriz X :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

2.- Se sabe que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es -3 .

Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) [1 punto] $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$.

b) [1,5 puntos] $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} + a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

Solución:

a) Como $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$ tenemos que:

$$|-2A| = (-2)^3 \cdot |A| = -8 \cdot (-3) = 24$$

Como el producto de una matriz por su inversa es la identidad $A^{-1} \cdot A = I$ y el determinante de un producto es el producto de determinantes $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ tenemos que:

$$|I| = |A^{-1}| \cdot |A| \Rightarrow 1 = |A^{-1}| \cdot |A| \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

b) Utilizando las propiedades:

- Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante
- Si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante el determinante cambia de signo.

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -14 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -14 \cdot (-3) = -42$$

Utilizando las propiedades:

- Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el primer y segundo sumando respectivamente.
- Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante
- Si un determinante tiene dos filas proporcionales, dicho determinante vale 0.
- El determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta.

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} + a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & 5a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + 0 = 5 \cdot (-3) = -15$$

3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$x + 2y - 3z = 3$$

$$2x + 3y + z = 5$$

a) [1,5 puntos] Calcula α de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

b) [1 punto] Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

Solución:

a) Como el sistema tiene dos ecuaciones, como mucho el rango ha de ser dos. Al ser el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

tiene de rango 2, y al tener tres incógnitas es un sistema compatible indeterminado, es decir con infinitas soluciones.

Si le añadimos la ecuación $\alpha x + y - 7z = 1$ al sistema, para que tenga las mismas soluciones que el original la matriz de las coeficientes A del nuevo sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + y - 7z = 1 \end{cases}$$

ha de tener rango 2, por lo tanto el determinante asociado a la matriz de coeficientes del sistema ha de ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & -7 \end{vmatrix} = (-21+2\alpha-6)-(-9\alpha+1-28) = 11\alpha$$

Por lo tanto para que ambos sistemas tengan las mismas soluciones $\alpha=0$.

b) Si la suma de los valores de las incógnitas es 4, tenemos la ecuación $x+y+z=4$. Queda el sistema:

$$\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+z=5 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

Aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius obtenemos que es un sistema compatible y determinado con solución única, ya que la matriz de coeficientes tiene determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3+2-6)-(-9+1+4) = 3$$

Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{25}{3}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-11}{3}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{3}$$

Se obtiene la solución $(x, y, z) = \left(\frac{25}{3}, \frac{-11}{3}, \frac{-2}{3}\right)$.

4.- **Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado 22 euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de 14 euros. Se pide:**

a) [1,25 puntos] **Expresar en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.**

b) [1,25 puntos] **Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.**

Solución:

Sea x el precio de un cuaderno

Sea y el precio de un rotulador

Sea z el precio de un bolígrafo

a) El enunciado se traduce en el sistema:

$$\begin{cases} 5x+2y+3z=22 \\ 2x+y+6z=14 \end{cases}$$

Es un sistema compatible indeterminado ya que tiene tres incógnitas y como el menor $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ se

cumple que $\text{rg}(A) = 2$. Lo parametrizamos en función de z (precio del bolígrafo como indica el enunciado).

$$\begin{cases} 5x+2y=22-3z \\ 2x+y=14-6z \end{cases}$$

Si a la primera ecuación le restamos la segunda multiplicada por 2 queda:

$$x = 9z - 6$$

Expresión que sustituida en la 2ª ecuación da:

$$18z - 12 + y = 14 - 6z \Rightarrow y = 14 - 6z - 18z + 12 = 26 - 24z$$

Es decir que:

- Un cuaderno cuesta 9 veces lo que un bolígrafo menos 6 euros.
- Un rotulador cuesta 26 euros menos 24 veces lo que un bolígrafo.

b) Para calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores, sustituimos lo que valen en función del precio de un bolígrafo:

$$8x+3y = 8(9z-6)+3(26-24z) = 72z-48+78-72z = 30€$$

Opción B

1.- Considera las matrices, $A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) [0,75 puntos] ¿Para qué valores de m se verifica que $A^2 = 2 \cdot A + I$? (I denota la matriz identidad).

b) [1,75 puntos] Para $m = 1$, calcula A^{-1} y la matriz X que satisface $A \cdot X - B = A \cdot B$.

Solución:

Calculamos:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m+1)^2 & 2 \\ 2 & (m-1)^2 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot A + I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la igualdad matricial obtenemos:

$$\begin{pmatrix} (m+1)^2 & 2 \\ 2 & (m-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}$$

Igualamos elemento a elemento, obteniendo el sistema:

$$m^2+2m+2 = 3+2m \Rightarrow m^2 = 1, \text{ de donde } m = \pm 1.$$

$$2 = 2. \text{ Cierto}$$

$$2 = 2. \text{ Cierto}$$

$$m^2 - 2m + 2 = 3 - 2m \Rightarrow m^2 = 1, \text{ de donde } m = \pm 1.$$

Por tanto la igualdad es cierta si $m = \pm 1$.

b) Para $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz tiene inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t)$ si su determinante es no nulo. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 1 = -1$$

La matriz tiene inversa.

Obtenemos la matriz traspuesta:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de los adjuntos de la traspuesta será:

$$\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego la inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

De $A \cdot X - B = A \cdot B$, tenemos:

$$A \cdot X = B + A \cdot B.$$

Como existe la matriz inversa multiplicamos por la izquierda la expresión por A^{-1} .

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B + A \cdot B) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B + A^{-1} \cdot A \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B + B$$

Sustituyendo las matrices:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.- Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes determinantes sin

desarrollarlos::

a) [0,5 puntos] $\det(3A)$.

b) [0,5 puntos] $\det(A-1)$.

c) [0,75 puntos] $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

d) [0,75 puntos] $\begin{vmatrix} & 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 & \\ -1 & 0 & -1 & \end{vmatrix}$.

Solución:

a) Como $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$ tenemos que:

$$|3A| = 3^3 \cdot |A| = 27 \cdot 2 = 54$$

b) Como el producto de una matriz por su inversa es la identidad $A^{-1} \cdot A = I$ y el determinante de un producto es el producto de determinantes $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ tenemos que:

$$|I| = |A^{-1}| \cdot |A| \Rightarrow 1 = |A^{-1}| \cdot |A| \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

c) Utilizando las propiedades:

- Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.
- Si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante el determinante cambia de signo.

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 \cdot 2 = -12$$

d) Utilizando las propiedades:

- Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el primer y segundo sumando respectivamente.
- Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.
- Si un determinante tiene dos filas proporcionales, dicho determinante vale 0.
- Si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante el determinante cambia de signo.

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} & 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 & \\ -1 & 0 & -1 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 1 & 2 & 3 \\ x & y & z & \\ -1 & 0 & -1 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & \\ -1 & 0 & -1 & \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 = (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} x + (m+1)y + 2z = -1 \\ mx + y + z = m \\ (1-m)x + 2y + z = -m-1 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m .

b) [0,75 puntos] Resuélvelo para $m = 2$. Para dicho valor de m , calcula, si es posible, una solución en la que $z=2$.

Solución:

a) La matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 & m \\ 1-m & 2 & 1 & -m-1 \end{pmatrix}$$

Hallamos el determinante asociado a la matriz del sistema:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{vmatrix} = [1-(m+1)(-1+m)+4m] - [2(1-m)+2+m(m+1)] = -2m^2+5m-2.$$

Resolviendo la ecuación $2m^2-5m+2=0$, obtenemos las soluciones $m = 2$ y $m = \frac{1}{2}$.

- Si $m \neq 2$ y $m \neq \frac{1}{2}$, $|A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. Aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius sabemos que el sistema es compatible y determinado con tiene solución única.
- Si $m = \frac{1}{2}$ tenemos la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Como el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \neq 0, \text{ tenemos que } \text{rg}(A) = 2$$

Como el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 3/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & -3/2 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} [(-12+3-8)-(-4+8-9)] = \frac{-12}{8} \neq 0, \text{ tenemos que } \text{rg}(A) = 3$$

Como $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$, el sistema es incompatible y no tiene solución.

- Si $m = 2$ tenemos la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Como el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-6 = -5 \neq 0, \text{ tenemos que } \text{rg}(A) = 2$$

Como el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0, \text{ ya que la fila la } 1^{\text{a}} \text{ menos la } 3^{\text{a}} \text{ es la } 2^{\text{a}}, \text{ tenemos que } \text{rg}(A^*) = 2.$$

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < n^{\circ}$ de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado con tiene infinitas soluciones.

b) Como hemos visto en el apartado anterior si $m = 2$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2$, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones. Como el rango es 2, sólo necesitamos 2 ecuaciones y tomamos la 1ª y la 2ª.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

Tomamos z como parámetro $z = \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 3y = -1 - 2\lambda \\ 2x + y = 2 - \lambda \end{cases}$$

A la primera fila multiplicada por dos le resto la segunda:

$$-5y = 4 - 3\lambda \Rightarrow y = -\frac{4}{5} - \frac{3\lambda}{5}$$

Sustituyendo dicho valor en la 1ª ecuación tenemos que:

$$x + 3\left(-\frac{4}{5} - \frac{3\lambda}{5}\right) = -1 - 2\lambda$$

despejando obtenemos:

$$x = \frac{7}{5} - \frac{\lambda}{5}$$

La solución general es:

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{5} - \frac{\lambda}{5}, -\frac{4}{5} - \frac{3\lambda}{5}, \lambda\right) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Tomando $z = 2$, la solución pedida es:

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{5} - \frac{2}{5}, -\frac{4}{5} - \frac{3 \cdot 2}{5}, 2\right) = (1, -2, 2).$$

- 4.- [2,5 puntos] Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B y C. El primer lingote contiene 20 g del metal A, 20 g del B y 60 del C. El segundo contiene 10 g de A, 40 g de B y 50 g de C. El tercero contiene 20 g de A, 40 g de B y 40 g de C. Queremos elaborar a partir de estos lingotes uno nuevo que contenga 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C. ¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?

Solución:

Sea x el número de lingotes del primer tipo

Sea y el número de lingotes del segundo tipo

Sea z el número de lingotes del tercer tipo

Sea A el número de gramos del primer metal

Sea B el número de gramos del segundo metal

Sea C el número de gramos del tercer metal

Del enunciado sacamos que:

$$15A + 35B + 50C = x(20A + 20B + 60C) + y(10A + 40B + 50C) + z(20A + 40B + 40C)$$

Que igualando miembro a miembro nos da el sistema:

$$\begin{cases} 20x + 10y + 20z = 15 \\ 20x + 40y + 40z = 35 \\ 60x + 50y + 40z = 50 \end{cases}$$

Restando de la 2ª ecuación la 1ª y de la 3ª la 1ª multiplicada por 3 queda:

$$\begin{cases} 30y + 20z = 20 \\ 20y - 20z = 5 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que:

$$50y = 25 \Rightarrow y = 0,5$$

Sustituyendo en la segunda obtenemos:

$$20z = 20y - 5 = 10 - 5 = 5 \Rightarrow z = 0,25$$

Sustituyendo en la primera obtenemos:

$$20x + 5 + 5 = 15 \Rightarrow 20x = 5 \Rightarrow x = 0,25$$

Como los lingotes son todos de 100 gramos debemos tomar 25 grs. del primer lingote, 50 grs. del segundo y 25 grs. del tercero.