

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Sabiendo que es $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \cdot \sin(x)}$ finito, calcula a y el valor del límite.

Ejercicio 2. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) **[1,5 puntos]** Halla a y b sabiendo que f es derivable en \mathbb{R} .
b) **[1 punto]** Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)} dx$ (Sugerencia: integración por partes).

Ejercicio 4.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x|x-2|$

- a) **[1 punto]** Estudia la derivabilidad de f en $x = 2$.
b) **[0,5 puntos]** Esboza la gráfica de f.
c) **[1 punto]** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Opción B

Ejercicio 1. Sea f la función definida por $f(x) = \frac{x^4 + 3}{x}$, para $x \neq 0$.

- a) **[0.75 puntos]** Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f.
b) **[1 punto]** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f.
c) **[0.75 puntos]** Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Determina una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada viene dada por $f'(x) = x^2 + x - 6$ y que el valor que alcanza f en su punto de máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto de mínimo (relativo).

Ejercicio 4.- Sea $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x + 1)$ (\ln denota la función logaritmo neperiano).

- a) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.
b) **[1,5 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y la recta $x = 1$.

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Sabiendo que es $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \cdot \text{sen}(x)}$ finito, calcula a y el valor del límite.

Solución:

Hallamos el límite de la expresión:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \cdot \text{sen}(x)} = \frac{\cos(0) - e^0 + a \cdot 0}{0 \cdot \text{sen}(0)} = \frac{1 - 1 + 0}{0} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Como ambas funciones f y g son continuas en el intervalo $[a - \delta, a + \delta]$ y derivables en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y tales que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ podemos aplicar la regla de L'Hôpital, que

dice que se verifica que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x \cdot \text{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \cdot \text{sen}(3x) - e^x + a}{\text{sen}(x) + x \cdot \cos(x)} = \frac{-3 \cdot 0 - e^0 + a}{0 + 0 \cdot 1} = \frac{-1 + a}{0}$$

Como según el enunciado el límite existe y es finito el numerador ha de ser nulo, para obtener una indeterminación $\left(\frac{0}{0}\right)$ y poder volver a aplicar la regla de L'Hôpital, por lo tanto $-1 + a = 0 \Rightarrow a = 1$.

Volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital, con $a = 1$, obteniendo el límite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \cdot \text{sen}(3x) - e^x + 1}{\text{sen}(x) + x \cdot \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9 \cdot \cos(3x) - e^x}{\cos(x) + \cos(x) - x \cdot \text{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9 \cdot \cos(3x) - e^x}{2\cos(x) - x \cdot \text{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9 \cdot \cos(0) - e^0}{2\cos(0) - 0 \cdot \text{sen}(0)} = \\ &= \frac{-9 \cdot 1 - e^0}{2 \cdot 1 - 0 \cdot 1} = \frac{-9 - 1}{2} = -5 \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) **[1,5 puntos]** Halla a y b sabiendo que f es derivable en \mathbb{R} .

b) **[1 punto]** Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

Solución:

a) Si la función es derivable ha de ser continua. Como la rama de la izquierda es una polinómica de segundo grado, es por lo tanto continua y derivable en todo \mathbb{R} , en particular en $x < 2$. La rama de la derecha es una polinómica de segundo grado, por lo tanto continua y derivable en todo \mathbb{R} , en particular en $x > 2$

Obligamos a que sea continua en $x = 2$:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 3x) = 4a + 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - bx - 4) = -2b$$

Igualando ambas expresiones obtenemos la ecuación

$$4a + 6 = -2b \quad [1]$$

Obligamos a que sea derivable en $x = 2$:

$$\begin{aligned} f'(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(ax^2 + 3x) - (4a + 6)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{a(x^2 - 4) + 3(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)[a(x + 2) + 3]}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} [a(x + 2) + 3] = 4a + 3 \end{aligned}$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2 - bx - 4) - (4a + 6)}{x - 2}$$

Utilizando la expresión [1]:

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2 - bx - 4) + 2b}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2 - 4) - b(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)[(x + 2) + b]}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} [(x + 2) + b] = 4 - b$$

Igualando ambas expresiones obtenemos la ecuación

$$4a + 3 = 4 - b \quad [2]$$

Como $f'(2^+) \neq f'(2^-)$, $f(x)$ no es derivable en $x = 2$, por lo cual es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 4a + 6 = -2b \\ 4a + 3 = 4 - b \end{cases}$, obtenemos $a = 2$ y $b = -7$, por tanto la función pedida es

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 7x - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b) Como nos piden la recta tangente y normal en $x = 3$, tomamos la rama de la función con $x > 2$, es decir

$$f(x) = x^2 + 7x - 4$$

La recta tangente en $x = 3$ es:

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3)$$

La recta normal en $x = 3$ es:

$$y - f(3) = (-1/f'(3)) \cdot (x - 3)$$

Tomaos valores:

$$(x) = x^2 + 7x - 4 \Rightarrow f(3) = 9 + 21 - 4 = 26$$

$$f'(x) = 2x + 7 \Rightarrow f'(3) = 6 + 7 = 13$$

La recta tangente en $x = 3$ es:

$$\boxed{y - 26 = 13(x - 3)}$$

La recta normal en $x = 3$ es:

$$\boxed{y - 26 = (-1/13) \cdot (x - 3)}$$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)} dx$ (Sugerencia: integración por partes).

Solución:

Resolvemos primero la integral indefinida $I = \int \frac{x}{\cos^2(x)} dx$ que realizamos por partes siendo:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \frac{dx}{\cos^2(x)} \Rightarrow v = \operatorname{tg} x$$

$$I = x \cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \cdot dx = x \cdot \operatorname{tg} x - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot dx = x \cdot \operatorname{tg} x - [-\ln(\cos x)] = x \cdot \operatorname{tg} x + \ln(\cos x)$$

Luego aplicamos la regla de Barrow:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)} dx &= [x \cdot \operatorname{tg} x + \ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = \left[\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) \right] - [0 \cdot \operatorname{tg}(0) + \ln(\cos 0)] = \\ &= \left[\frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] - [0 + \ln(1)] = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 4.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x|x-2|$

- a) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f en $x = 2$.
 b) [0,5 puntos] Esboza la gráfica de f .
 c) [1 punto] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución

a) Para estudiar la derivabilidad de f en $x = 2$, antes debemos considerar la continuidad de la función en dicho punto. Para ello redefinimos la función como función a trozos.

$$x|x-2| = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

La rama de la izquierda es una polinómica de segundo grado, por lo tanto continua y derivable en todo \mathbb{R} , en particular en $x < 2$

La rama de la derecha es una polinómica de segundo grado, por lo tanto continua y derivable en todo \mathbb{R} , en particular en $x > 2$

Veamos la continuidad de $f(x)$ en $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 2x) = 0$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2x) = 0$$

Al ser dichos valores iguales, la función $f(x)$ es continua en $x = 2$, y por tanto en todo \mathbb{R} .

Estudiamos la derivabilidad en $x = 2$, es decir si son iguales las derivadas laterales:

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + 2x - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x) = -2$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2$$

Como $f'(2^+) \neq f'(2^-)$, $f(x)$ no es derivable en $x = 2$, por lo cual es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$

b) Para calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas representamos dicha gráfica teniendo en cuenta que la rama de la izquierda es una parábola cóncava cuyo vértice es la solución de $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = -2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ cuya ordenada es: } -1^2 - 2(-1) = 1 \text{ es decir } V = (1, 1)$$

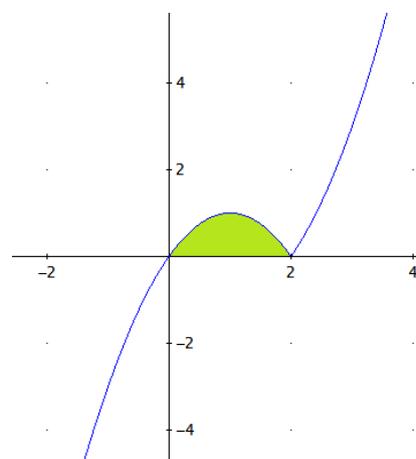
La rama de la derecha es una parábola convexa cuyo vértice es la solución de $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ cuya ordenada es: } 1^2 - 2(1) = -1 \text{ es decir } V = (1, -1) \text{ que no pertenece al dominio.}$$

Obtenemos la gráfica de la figura adjunta.

c) El área que nos piden es

$$A = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \left[\frac{-x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \left(\frac{-8}{3} + 4 \right) - 0 = \frac{4}{3} u^2$$



Opción B

Ejercicio 1. Sea f la función definida por $f(x) = \frac{x^4 + 3}{x}$, para $x \neq 0$.

- (a) [0,75 puntos] Halla los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f .
 (b) [1 punto] Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f .
 (c) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de f .

Solución

a1) Cortes con los ejes.

- Corte con el eje OY: No tiene porque no está definida la función para $x = 0$.

Corte con el eje OX: $\frac{x^4 + 3}{x} = 0 \Rightarrow x^4 + 3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{-3}$ que no tiene *Solución* real.

- Luego la función no tiene cortes con los ejes.

a2) Asíntotas.

- Asíntota vertical: $x = 0$ puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 + 3}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4 + 3}{x} = -\infty$$

- Asíntota horizontal: No tiene puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3}{x} = +\infty$$

- Asíntota oblicua: No tiene puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^4 + 3)/x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3}{x^2} = +\infty$$

Por lo tanto presenta una rama parabólica.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos
 Para calcularlos hallamos la primera derivada de la función.

$$f'(x) = \frac{4x^3 \cdot x - (x^4 + 3)}{x^2} = \frac{3(x^4 - 1)}{x^2}$$

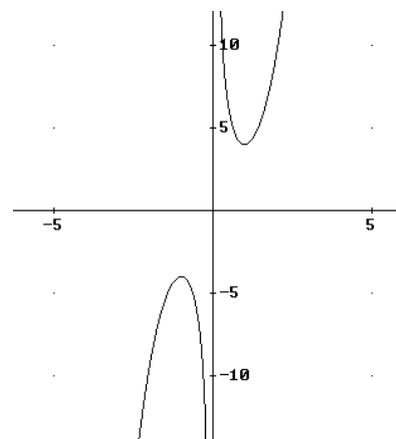
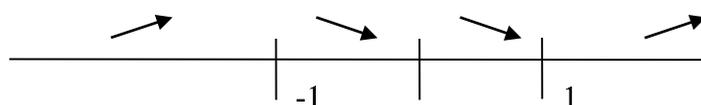
que se anula en:

$$3(x^4 - 1) = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1$$

con soluciones $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$

Luego se establecen las regiones: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

Tomando valores en la derivada en cada una de las regiones obtenemos que:



- f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
- f es decreciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$

Por lo tanto deducimos que la función tiene:

- Un máximo relativo en $(-1, -4)$
- Un mínimo relativo en $(1, 4)$.

c) Un esbozo de la gráfica es el de la figura adjunta:

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Solución:

Es un problema de optimización. Consideramos que x e y son los dos números pedidos. Por el enunciado del problema debemos optimizar:

$$P(x, y) = x^2 \cdot y^2 \quad [1]$$

Sujeta a la relación:

$$x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$$

Sustituyendo en [1]:

$$P(x) x^2 \cdot (10-x)^2 = x^2 \cdot (100-20x+x^2) = x^4-20x^3+100x^2.$$

Para maximizarlo hallamos su primera derivada $P'(x)$:

$$P'(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x.$$

y resolvemos $P'(x) = 0$ que serán los posibles máximos o mínimos.

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 60x^2 + 200x = 0 = x(4x^2 - 60x + 200) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 60x + 200 = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ con solución $x = 0$.

$$4x^2 - 60x + 200 = 0 \Rightarrow x^2 - 15x + 50 = 0 \text{ con soluciones } x = 10 \text{ y } x = 5.$$

Luego los posibles máximos o mínimos son $x_0 = 0$, $x_1 = 5$ y $x_2 = 10$.

Hallemos $P''(x)$ y comprobemos dichos valores para averiguar si es máximo o mínimo:

$$P''(x) = 12x^2 - 120x + 200$$

- Como $P''(0) = 200 > 0$, $x = 0$ es un mínimo relativo.
- Como $P''(10) = 200 > 0$, $x = 10$ es un mínimo relativo.
- Como $P''(5) = -100 < 0$, $x = 5$ es un máximo relativo.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Determina una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada viene dada por $f'(x) = x^2 + x - 6$ y que el valor que alcanza f en su punto de máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto de mínimo (relativo).

Solución:

Vamos a determinar en primer la integral de $f'(x)$ que es $f(x)$:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2 + x - 6) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + C$$

Los extremos, máximos o mínimos relativos se alcanzan en los valores que anulan la derivada:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \text{ con soluciones } x_1 = -3 \text{ y } x_2 = 2$$

Para comprobar si son máximos o mínimos hallamos la 2ª derivada y comprobamos su valor:

$$f''(x) = 2x + 1$$

- Como $f'(-3) = 0$ y $f''(-3) = -5 < 0$, $x_1 = -3$ es un máximo relativo
- Como $f'(2) = 0$ y $f''(2) = 5 > 0$, $x_2 = 2$ es un mínimo relativo

Sustituimos los valores en la integral $f(x)$:

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{3} + \frac{(-3)^2}{2} - 6(-3) + C = 9 + \frac{9}{2} + C = \frac{27}{2} + C$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 6 \cdot 2 + C = \frac{8}{3} - 10 + C = -\frac{22}{3} + C$$

Aplicamos el enunciado del problema de que el valor que alcanza f en su punto de máximo relativo es el triple del valor que alcanza en su punto de mínimo relativo:

$$f(-3) = 3f(2) \Rightarrow \frac{27}{2} + C = 3 \cdot \left(-\frac{22}{3} + C \right) \Rightarrow \frac{27}{2} + C = -22 + 3C \Rightarrow 27 + 2C = -44 + 6C \Rightarrow 71 = 4C \Rightarrow C = \frac{71}{4}$$

Luego la función pedida es:
$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{71}{4}$$

Ejercicio 4.- Sea $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x + 1)$ (\ln denota logaritmo neperiano).

a) [1 punto] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , la recta tangente obtenida en el apartado anterior y la recta $x = 1$.

Solución

a) La recta tangente en $x = 0$ en forma punto-pendiente es:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

Tomamos valores en la función y la derivada:

$$f(x) = \ln(x+1) \Rightarrow f(0) = \ln(0+1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

Sustituyendo valores:

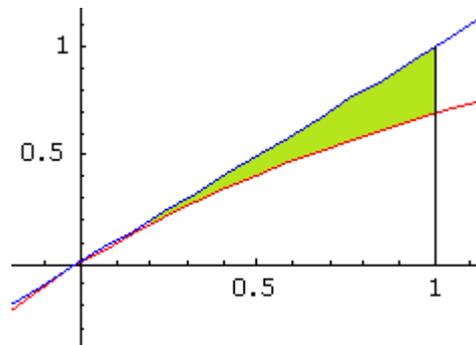
$$y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$$

que es la bisectriz del I y III cuadrante.

b) La gráfica de $\ln(x + 1)$ es exactamente igual que la de $\ln(x)$ pero desplazada una unidad a la izquierda en el eje de abscisas Ox . Un esbozo del recinto pedido es el de la figura adjunta donde observamos la recta tangente está por encima de la gráfica de la función:

Vamos ya a calcular el área que nos piden

$$A = \int_0^1 [x - \ln(x + 1)] dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 \ln(x + 1) dx$$



La primera es una integral inmediata y la segunda es una por partes, de la cual hallaremos una primitiva

$$I_1 = \int \ln(x + 1) dx$$

$$u = \ln(x+1) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x+1}$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$I_1 = x \ln(x + 1) - \int \frac{x dx}{x + 1}$$

Como la integral obtenida es racional donde numerador y denominador tiene el mismo grado sumamos y restamos 1 en el numerador:

$$I_1 = x \ln(x + 1) - \int \frac{x dx}{x + 1} = x \ln(x + 1) - \int \frac{x + 1 - 1 dx}{x + 1} = x \ln(x + 1) - \int dx + \int \frac{dx}{x + 1} = x \cdot \ln(x + 1) - x + \ln(x + 1)$$

Luego el valor del área es:

$$A = \left[\frac{x^2}{2} - x \cdot \ln(x + 1) + x - \ln(x + 1) \right]_0^1 = \left[\frac{1}{2} - 1 \cdot \ln(2) + 1 + \ln(2) \right] - \left[\frac{0}{2} - 0 \cdot \ln(1) + 0 + \ln(1) \right] = \frac{3}{2} + 2 \cdot \ln(2) \text{ u}^2$$

Apellidos: _____ Nombre: _____

Curso: 2º Grupo: ___ Día: _____

CURSO 2015-16



Instrucciones:

- a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
- b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**
- c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
- d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right)$ es finito, calcula a y el valor del límite. (ln denota el logaritmo neperiano).

Ejercicio 2.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) [1,75 puntos] Halla a, b y c para que la gráfica de f tenga un punto de inflexión de abscisa $x = \frac{1}{2}$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ tenga de ecuación $y = 5 - 6x$.

b) [0,75 puntos] Para $a = 3$, $b = -9$ y $c = 8$, calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx$

Ejercicio 4.- Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = \frac{|x|}{2}$ y $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

a) [1 punto] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ellas.

b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x - e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x = 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Calcula a y b.

b) [0,75 punto] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] De entre todos los número reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Sea la función definida por $f(x) = x \cdot \ln(x + 1)$ para $x > -1$ (ln denota el logaritmo neperiano). Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1, 0).

Ejercicio 4.- Considera el recinto limitado por las siguientes curvas

$$y = x^2, y = 2 - x^2, y = 4$$

a) [1 punto] Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.

b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto.

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right)$ es finito, calcula a y el valor del límite. (\ln denota el logaritmo neperiano).

Solución:

Reducimos a común denominador la expresión:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \ln x - a(x-1)}{(x-1) \cdot \ln x} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

Como ambas funciones f y g son continuas en el intervalo $[a - \delta, a + \delta]$ y derivables en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y tales que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ podemos aplicar la regla de L'Hôpital, que

dice que se verifica que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \ln x - a(x-1)}{(x-1) \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - a}{1 \cdot \ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1 - a}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \frac{1-a}{0}$$

Como según dice el enunciado el límite existe y es finito el numerador ha de ser cero, para poder seguir aplicando la regla de L'Hôpital, es decir $1 - a = 0$, de donde $a = 1$. Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital, con $a = 1$, tenemos que el límite es:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{x-(x-1)}{x^2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 2.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) [1,75 puntos] Halla a , b y c para que la gráfica de f tenga un punto de inflexión de abscisa $x = \frac{1}{2}$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ tenga de ecuación $y = 5 - 6x$.

b) [0,75 puntos] Para $a = 3$, $b = -9$ y $c = 8$, calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Solución:

a) La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es polinómica por lo tanto es continua, derivable e integrable en \mathbb{R} . Hallemos la primera y segunda derivadas que serán necesarias a continuación.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

- Como tiene un punto de inflexión en $x = \frac{1}{2} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 6 \cdot \frac{1}{2} + 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

- Si en $x = 0$ la recta tangente es $y = f(x) = 5 - 6x$, luego tenemos que $f(0) = 5 \Rightarrow c = 5$.

- Como la pendiente de la recta tangente anterior ($y' = -6$) coincide con $f'(0)$ obtenemos: $f'(0) = b = -6$

La función pedida es $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$.

b) Tomando $a = 3$, $b = -9$ y $c = 8$ la función es $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$.

Los extremos relativos los estudiamos a partir de su primera derivada $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

Si $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ con soluciones $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$ que serán los posibles extremos relativos.

Calculamos la segunda derivada para averiguar su carácter.

$$f''(x) = 6x + 6$$

Como $f''(-3) = 6 \cdot (-3) + 6 = -12 < 0$, en $x = -3$ hay un máximo relativo de valor $f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) + 8 = 35$.

Como $f''(1) = 6 \cdot (1) + 6 = 12 > 0$, en $x = 1$ hay un mínimo relativo de valor $f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 9(1) + 8 = 3$.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula
$$\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx$$

Solución:

Determinamos primero la integral indefinida asociada:

$$I = \int \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2 - x - 2} dx$$

Como es una integral racional de igual grado numerador y denominador debemos realizar la división:

$$\begin{array}{r} x^2 \\ \underline{x^2 - x - 2} \\ -x^2 + x + 2 \\ \hline 1 \\ \underline{x+2} \\ x+2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Aplicando que $\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$:

$$\int \frac{x^2}{x^2 - x - 2} dx = \int \left(1 + \frac{x+2}{x^2 - x - 2} \right) dx = \int dx + \int \frac{x+2}{x^2 - x - 2} dx = x + \int \frac{x+2}{x^2 - x - 2} dx$$

$\int \frac{x+2}{x^2 - x - 2} dx$ es una integral racional y descomponemos el denominador en producto de factores:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ y } x = 2.$$

$$I_1 = \int \frac{x+2}{(x+1)(x-2)} dx = \int \left[\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \right] dx$$

Igualando valores queda:

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow x+2 = A(x-2) + B(x+1)$$

Calculamos las constantes A y B:

$$\text{Para } x = -1 \Rightarrow 1 = -3A \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Para } x = 2 \Rightarrow 4 = 3B \Rightarrow B = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto:

$$I = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \left[\int \frac{-1/3}{x+1} dx + \int \frac{4/3}{x-2} dx \right] = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \ln|x+1| + \frac{2}{3} \ln|x-2|$$

La integral definida pedida es:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx &= \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{6} \ln|x+1| + \frac{2}{3} \ln|x-2| \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \ln(2) + \frac{2}{3} \ln(1) \right] - \left[0 - \frac{1}{6} \ln(1) + \frac{2}{3} \ln(2) \right] = \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \ln(2) \end{aligned}$$

Ejercicio 4.- Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = \frac{|x|}{2}$ y $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

a) [1 punto] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Solución:

a) La gráfica del valor absoluto $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ está formada por dos semirrectas coincidentes con

las bisectrices del primer y tercer cuadrante que se cortan en el origen. La gráfica de $f(x) = \frac{|x|}{2} =$

$\begin{cases} -x/2 & \text{si } x < 0 \\ x/2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es similar aunque con menor pendiente, por lo tanto es continua en \mathbb{R} por ser ambas

ramas continuas y es simétrica respecto del eje de ordenadas, es decir una función par.

La gráfica de $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es también simétrica par, y por lo tanto simétrica respecto al eje de ordenadas.

Como es una función racional hallamos su gráfica mediante sus asíntotas y puntos de corte con los ejes.

- Su dominio es \mathbb{R} ya que no se puede anular el denominador y por lo tanto no tiene asíntotas verticales.

- Corta al eje OY en $x = 0 \Rightarrow g(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$, es decir el punto $(0,1)$.

- Tiene asíntota horizontal ya que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) = 0$ a la que se acerca por encima.

- Si derivamos obtenemos:

$g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ que negativa para $x > 0$ y positiva en $x < 0$, por lo tanto es creciente en $(-\infty, 0)$ y

decreciente en $(0, +\infty)$ y por lo tanto el punto $(0,1)$ es un máximo.

Finalmente calculamos los puntos de corte de f y g .

- De $f(x) = g(x)$ y $x > 0$ tenemos que $\frac{1}{1+x^2} = \frac{x}{2} \Rightarrow x(1+x^2) = 2 \Rightarrow x^3+x-2 = 0$. Cuya única solución real es $x = 1$ tal como comprobamos por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

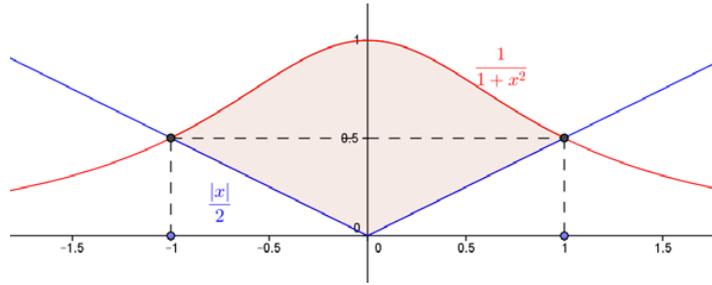
Queda $x^2+x+2 = 0$ con soluciones complejas conjugadas:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Sustituimos valores obteniendo que el punto de corte es $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

- Como ambas funciones presentan simetrías pares el otro punto de corte es $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



b) Para calcular el área del recinto limitado por las gráficas de f y g observamos la simetría de la figura respecto al eje de ordenadas, luego:

$$A = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{2} \right) dx = 2 \left(\arctg x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 2 \cdot \left(\arctg(1) - \frac{1}{4} - \arctg(0) + 0 \right) = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x - e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Calcula a y b .

b) [0,75 punto] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

Solución:

a) Como es derivable en su dominio, por tanto también es continua en su dominio; en particular es continua y derivable en $x = 0$.

Como es continua en $x = 0$, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

Como ambas funciones f y g son continuas en el intervalo $[a - \delta, a + \delta]$ y derivables en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y tales que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ podemos aplicar la regla de L'Hôpital, que

dice que se verifica que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{1+1}{2} = 1$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b$$

Igualando valores obtenemos que $b = 1$

Como es derivable en $x = 0$, $f'(0^-) = f'(0^+)$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2x} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{2x^2} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

Indeterminación que resolvemos aplicando la regla de L'Hôpital:

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{4x} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

Indeterminación que resolvemos aplicando nuevamente la regla de L'Hôpital:

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{4} = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + 1 - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} a = a$$

Igualando valores obtenemos que $a = 0$

b) Para hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$ utilizamos la ecuación en forma punto-pendiente. Como $x = -1$ está en la rama de la izquierda:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \Rightarrow f(-1) = \frac{e^{-1} - e^1}{-2} = \frac{1/e - e}{-2} = \frac{1/e - e}{-2} = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 2x - (e^x - e^{-x}) \cdot 2}{(2x)^2} = \frac{2e^x(x-1) + 2e^{-x} \cdot (x+1)}{4x^2}$$

Sustituyendo valores:

$$f'(-1) = \frac{2e^{-1}(-1-1) + 2e \cdot (-1+1)}{4(-1)^2} = \frac{-4e^{-1}}{4} = \frac{-1}{e}$$

Luego la recta tangente en $x = -1$ es:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Rightarrow y - \frac{e^2 - 1}{2e} = \frac{-1}{e}(x + 1) \Rightarrow y = -\frac{x}{e} + \frac{e^2 - 3}{2e}$$

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] De entre todos los número reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

Solución:

Es un problema de optimización, siendo la función a minimizar:

$$S(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$S'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Si la suma es mínima, $S'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1$ con soluciones $x = \pm 1$. Como son números reales positivos sólo sirve $x = 1$.

Comprobemos que es un mínimo utilizando el criterio de la segunda derivada:

$$S''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow S''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0$$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Sea la función definida por $f(x) = x \cdot \ln(x + 1)$ para $x > -1$ (ln denota el logaritmo neperiano). Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, 0)$.

Solución:

Una primitiva de f es:

$$F(x) = \int x \cdot \ln(x + 1) \cdot dx$$

Que es una integral por partes por partes siendo:

$$u = \ln(x + 1) \quad dv = x \cdot dx$$

$$du = \frac{1}{x + 1} \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$F(x) = \int x \cdot \ln(x + 1) \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x + 1) - \int \frac{x^2}{2(1 + x)} \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x + 1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1 + x} \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x + 1) - \frac{1}{2} I_1$$

I_1 es una integral racional con mayor grado del numerador que el denominador:

$$\begin{array}{r} x^2 \\ -x^2+x \\ \hline x+1 \\ \hline 1 \end{array}$$

Aplicando que $\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$:

$$\int \frac{x^2}{1+x} \cdot dx = \int \left(x-1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$$

Por lo tanto la primitiva es:

$$F(x) = \frac{x^2-1}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{x(x-2)}{4} + K$$

Como pasa por el punto (1, 0), $F(1) = 0$:

$$F(1) = \frac{1-1}{2} \cdot \ln(1+1) - \frac{1(1-2)}{4} + K \Rightarrow \frac{1}{4} + K = 0 \Rightarrow K = -\frac{1}{4}$$

La primitiva pedida es

$$F(x) = \frac{x^2-1}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{x(x-2)}{4} + \frac{1}{4}$$

Ejercicio 4.- Considera el recinto limitado por las siguientes curvas $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = 4$

a) [1 punto] Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.

b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto.

Solución:

a) Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.

La gráfica de $f(x) = x^2$ es la de una parábola convexa porque el coeficiente de x^2 es positivo, siendo su vértice el mínimo solución de $f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$, es decir el vértice es el punto $V = (0, 0)$.

La gráfica de $g(x) = 2 - x^2$ es la de una parábola cóncava porque el coeficiente de x^2 es positivo es negativo, siendo su vértice el máximo solución de $f'(x) = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$, es decir el vértice es el punto $V = (0, 2)$.

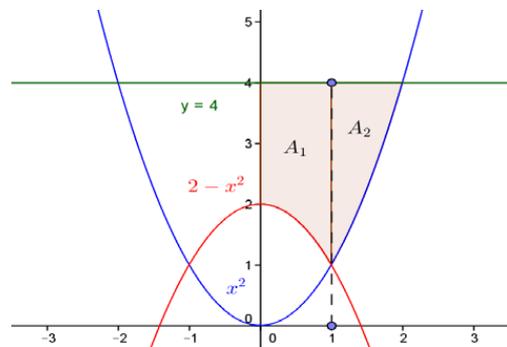
La gráfica de $y = 4$ es la de una recta paralela al eje de abscisas que pasa por la ordenada 4.

Un esbozo de las gráficas es la de la figura adjunta.

Hallamos puntos de corte:

$$x^2 = 2 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ y } x = 1.$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \text{ y } x = 2$$



b) Para calcular el área del recinto debemos tener en cuenta que las gráficas de las funciones presentan simetría par, es decir son simétricas respecto al eje de ordenadas:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2 \cdot (A_1 + A_2) = 2 \left[\int_0^1 (4 - (2 - x^2)) dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx \right] = 2 \left[\int_0^1 (2 + x^2) dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx \right] = \\ &= 2 \cdot \left(2x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + 2 \cdot \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \right) + 2 \cdot \left[\left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(4 - \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{14}{3} + \frac{10}{3} = \frac{24}{3} = 8 \text{ u}^2. \end{aligned}$$